Tipărirea acestei lucrări s-a realizat cu acordul comisiei centrale a celei de a XV-a ediții a Concursului interjudețean de matematică"Traian Lalescu"

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale
CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
(15 ; 2001 ; Arad)
Concursul Interjudețean de matematică "Traian Lalescu": enunțuri, bareme, soluții : ediția a XV-a, Arad, 24-25 martie 2001.
Arad : Editura Fundației "Moise Nicoară", 2001
28 pag., 14/20,5 cm
ISBN 973-99812-1-6

51

Tehnoredactarea: Major Csaba
Coperta: Loredana Crețu
Tipar: TRINOM S.R.L. Arad
Str. C. Hodoș Nr. 1. Arad

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"

Δεβα

24-25 MARTIE 2001

ARAD

Editura Fundației "Moise Nicoară"

COMISIA CENTRALĂ

Prof. univ. dr. Mihail Megan	- preşedinte
Prof. univ. dr. Viorel Radu	- membru
Conf. univ. dr. Constantin Buşe	- membru
Conf. univ. dr. Silviu Birăuaş	- membru
Conf. univ. dr. Dan Comănescu	- membru
Asist. univ. Mihai Chiş	- membru
Asist. univ. Răzvan Tudoran	- membru
Asist. univ. Alin Pogan	- membru
Asist. univ. Radu Moleriu	- membru

COMISIA DE ORGANIZARE

Prof. Maria Paşcalău	- inspector şcolar general, ISJ Arad
Prof. Mihai Matekovits	- inspector şcolar general adjunct, ISJ Arad
Prof. Sorin Haiduc	- inspector şcolar general adjunct, ISJ Arad
Prof. Viorel Tudoran	- inspector de matematică, ISJ Arad
Prof. Mircea Iucu	- inspector de matematică, ISJ Caraş-Severin
Prof. Maranda Linţ	- inspector de matematică, ISJ Hunedoara
Prof. Doru Ianculescu	- inspector de matematică, ISJ Timiş
Prof. Zeno Blajovan	- inspector de matematică, ISJ Timiş
Prof. Nicolae Pellegrini	- director, Casa Corpului Didactic, Arad
Prof. Vilhelm Portal	- director, Colegiul Naţional "Moise Nicoară", Arad
Prof. Gheorghe Herlo	- director adj., Colegiul Naţional "Moise Nicoară", Arad
Prof. Doina Stoica	- director, Grup Şcolar Industria Uşoară, Arad
Prof. Adina Avacovici	- director adj., Grup Şcolar Industria Uşoară, Arad
Prof. Iosif Feher	- director, Grup Şcolar Forestier, Arad
Prof. Dumitru Aleonte	- inspector teritorial, ISJ Arad
Prof. Ioan Lupei	- inspector teritorial, ISJ Arad
Prof. Moise Tolan	- inspector teritorial, ISJ Arad
Prof. Doina Cheta	- director adj., Liceul Teoretic "Vasile Goldiş", Arad
Prof. Rodica Crişan	- director, Şcoala cu clasele I-VIII nr. 12, Arad
Prof. Florin Bolojan	- director adj., Şcoala cu clasele I-VIII nr. 6, Arad

A XV-a ediţie a concursului interjudeţean de matematică *Traian Lalescu*

A intrat deja în tradiţie ca în fiecare primăvară cei mai buni elevi la matematică din judeţele Arad, Caraş-Severin, Hunedoara şi Timiş să participe la concursul interjudeţean "Traian Lalescu" organizat sub egida *Facultăţii de Matematică* din cadrul *Universităţii de Vest din Timişoara.* Începând cu anul 1985 acest concurs a însemnat de fiecare dată o agreabilă reuşită profesională şi a contribuit semnificativ la stimularea pregătirii matematice a elevilor din această parte a ţării.

Spiritul de competitivitate caracteristic structurilor fundamentale ale personalităţilor celor mai valoroşi tineri ai ţării, azi unii dintre ei distinşi matematicieni, a generat împliniri de excepţie în evoluţia unor matematicieni români şi a stârnit o admiraţie invariabilă, bine primită de elita elevilor matematicieni.

În acest an a venit rândul judeţului Arad să fie gazda acestui concurs interjudeţean de matematică. Trebuie menţionat că echipele judeţului Arad s-au clasat în ultimii ani pe primul loc la acest concurs, poziţie pe care probabil o vor obţine şi în acest an dacă avem în vecere că lotul acestui judeţ conţine şi doi premianţi la olimpiada internaţională de matematică. Este o bine meritată reflectare a muncii corpului profesoral arădean în domeniul matematicii.

Popularitatea concursului şi confirmarea premiilor obţinute de elevi la acest concurs în admiterea în învăţământul liceal respectiv superior arată importanţa sa în pregătirea matematică a elevilor din gimnaziu şi liceu.

În sprijinul stimulării participării la acest concurs în acest an Facultatea de Matematică din Timişoara oferă premianţilor din ultimii doi ani ai acestui concurs posibilitatea înscrierii la facultate fără a susţine proba de la concursul de admitere (aceasta fiind apreciată cu nota 10-zece).

Simţim o plăcută datorie să prezentăm omagiile noastre celor care n-au lăsat să se stingă flacăra acestui concurs aprinsă cu 16 ani în urmă.

Prof. Dr. Mihail Megan
Decanul
Facultăţii de Matematică
Universitatea de Vest
TIMIŞOARA

ENUNȚURI

Clasa a V-a

1. Arătați că dacă $37|\overline{abc}$ și $37|\overline{bca}$ atunci $37|\overline{cab}$.

2. Fie $a\in N^*$. Să se arate că fracția $\frac{2a+1}{a^2+a}$ este ireductibilă.

3. Să se determine mulțimile A și B știind că:

$A\cup B$ = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}

$A\cap B$ = {1,2,3,4,5}

$A\cap\{6,7\}=\Phi$.

Clasa a VI-a

1. Să se determine numărul natural x, de două cifre, știind că împărțit la suma cifrelor sale dă restul 13, iar împărțit la câtul obținut la prima împărțire dă restul 3.

2. Determinați valorile numărului p, astfel încât p^{p-1} să se dividă cu $(p-1)^p$.

3. Fie ABC un triunghi și [AD bisectoarea unghiului A, unde D∈(BC). Dacă m(∠ADC)=q.m(∠ACB), unde q ≥1, să se afle valorile lui q astfel ca triunghiul să fie dreptunghic isoscel.

4. Determinați a,b,c {0,1,...,9} astfel încât să avem:

$$\overline{a,(b)}+\overline{b,(c)}+\overline{c,(a)}=10 \quad \text{și}$$

$$\overline{a,(b)}+\overline{b,(c)}-\overline{0,(2.a)}=6 \quad .$$

Clasa a VII-a

1. Fie dat numărul $N=2001^{2001}$. Determinați
   a) ultimele 3 cifre ale lui N.
   b) ultimele 4 cifre ale lui N.

2. Fie ABCD un patrulater și M∈[BD] diferit de mijlocul segmentului. Fie E∈[AB], F∈[AD], G∈[BC], H∈[CD], astfel încât ME∥AD, MF∥AB, MG∥CD, NH∥BC. Arătați că dreptele BD, EF și GH sunt concurente.

3. Fie ABCD un patrulater în care AB.CD=AD.BC.
   a) Arătați că diagonala BD și bisectoarele unghiurilor ∠BAD și ∠BCD sunt concurente.
   b) Dacă E,F [BD] cu proprietatea că ∠BAE≡ ∠FAD, să se arate că:
      i) $\frac{BE}{DE}\cdot\frac{BF}{DF}=\frac{AB^2}{AD^2}$
      ii) ∠BCE≡ ∠FCD.

4. Să se determine numerele naturale n cu proprietatea ca numărul $\sqrt{n}+\sqrt{n+2001}$ este rațional.

Clasa a VIII-a

I. a) Arătaţi că dacă $x,y,z\in R$ şi $x+y+z\geq 0$ atunci $x^3+y^3+z^3\geq 3xyz$;
b) Dacă $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$ atunci
$(a+b+c)^3\geq 27abc$.

II. Din 10 m^2 de sticlă se confecţionează un acvariu (cutie paralelipipedică, fără capac superior). Pot fi alese dimensiunile acvariului astfel încât în acesta să încapă 2500 litri de apă? Justificaţi răspunsul.

III. Fie m, n, p numere raţionale astfel încât $m^3+2n^3+4p^3=0$. Arătaţi că $m=n=p=0$.

IV. Un tetraedru regulat de latură 3 se secţionează cu plane paralele cu feţele situate la distanţa 1 de fiecare vârf. Se îndepărtează cele patru tetraedre care conţin vârfurile teraedrului iniţial. Încape corpul geometric rămas într-o cutie cubică de latură 1 ? Justificaţi răspunsul.

Constantin Buşe
Răzvan Tudoran

Clasa a IX-a

1. a) Să se deducă o formulă pentru $1^3+2^3+3^3+...+n^3$, unde $n\in N$.
b) Să se calculeze
$[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+[\sqrt[3]{3}]+...+[\sqrt[3]{2001}]$.

2. Să se arate că toate soluţiile $x>0$ ale ecuaţiei:
$$[x]=x.\{x\}$$
sunt iraţionale([a] este partea întreagă a numărului a, iar {a} este partea fracţionară).

3. Fie $M=\{f:Z\to Z \mid f$ satisface P şi Q, unde:
P: $\forall x,y\in Z$ astfel încât $|x-y|=2\Rightarrow|f(x)-f(y)|=2$
Q: $\forall x,y\in Z$ astfel încât $|x-y|=3\Rightarrow|f(x)-f(y)|=3$
a) Să se arate că:
i) $f\in M \Rightarrow -f\in M$,
ii) $f\in M$ şi $a\in Z \Rightarrow f+a\in M$,
iii) $f\in M$ şi $g:Z\to Z, g(n)=f(-n)\Rightarrow g\in M$,
b) Fie $f\in M$ cu $f(0)=0$ şi $f(2)=2$.
i) Să se arate că $f(1)=1$
ii) Să se determine f.
c) Să se determine M.

4. Pe laturile patrulaterului ABCD considerăm punctele $M_1,M_2\in[AB]$, $N_1,N_2\in[DC]$, $P_1,P_2\in[AD]$, $Q_1,Q_0\in[BC]$ astfel încât
$AM_1=M_1M_2=M_2B$, $DN_1=N_1N_2=N_2C$,
$AP_1=P_1P_2=P_2D$, $BQ_1=Q_1Q_2=Q_2C$.
Dacă $\{R\}=M_1N_1\cap P_1Q_1$, $\{S\}=M_1N_1\cap P_2Q_2$,

$\{T\}=M_2N_2 \cap P_1Q_1$, $\{U\}=M_2N_2 \cap P_2Q_2$, arătaţi că punctele R, S, T, U împart segmentele M_1N_1, P_1Q_1, M_2N_2, P_2Q_2 în câte trei părţi egale.

Clasa a X-a

I. Determinaţi $(x,y,n,m) \in N \times N \times N^* \times N^*$ astfel încât:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 . x^{k-1}\right) . \left(\sum_{k=1}^{m} k^2 . y^{k-1}\right) = 2001.$$

II. Fie $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $n \in N^*$, $k \in N$, $k<n$, $\varepsilon_n=\varepsilon_0$. Arătaţi că

$$n\sin\frac{2\pi}{n} < \sum_{k=1}^{n} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}| < 2\pi.$$

III. Fie $n \in N$, $n \geq 2$; $A=\{1,2,\dots,n\}$.

a) Determinaţi numărul submulţimilor $R \subset A \times A$ care satisfac condiţiile:

i) $(1,1) \in R$;

ii) dacă $(x,y) \in R$ şi $(x,z) \in R$ atunci $y=z$.

b) Există n astfel încât numărul submulţimilor de la punctul a) să fie egal cu 2001?

IV. Pe laturile unui triunghi **ABC** se construiesc paralelogramele [AB″A″], [BCC′B′], [ACA′C″]. Să se arate că se poate construi un triunghi cu segmentele [A′A″], [B′B″] şi [C′C″].

Constantin Buşe
Răzvan Tudoran

Clasa a XI-a

1. Să se determine mulţimea punctelor M, din planul dreptunghiului ABCD, pentru care avem relatia

$$MA+MC=MB+MD.$$

2. Fie $A,B \in M_n(R)$. Dacă există $k,m \in N$ astfel încât $A^k=B^m=O_n$, şi AB=BA, atunci I_n-AB şi I_n-A-B sunt inversabile.

3. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 2}$, pentru care $x_2 \geq 2$ şi

$$x_{n+1}=\sqrt[n]{x_n}+\frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 2.$$

Să se studieze convergenţa şirurilor (x_n) şi (y_n), unde $y_n=n(x_n-1)$, $\forall n \geq 2$.

4. Să se determine funcţiile continue $f:R \to R$, pentru care există funcţii injective $F:R \to R$, astfel ca

$$f(F(x+y))=F(f(x)+f(y)), \quad \forall x,y \in R.$$

Clasa a XII-a

1. Fie f, F: $[0,1]\to[0,1]$, f continuă.

Dacă $F(f(x))=\frac{4x}{\pi}\text{arctg}x$ pentru orice $x\in[0,1]$,

atunci $F\notin\int f$.

2. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{\text{arctg}x}{x+1}dx$.

3. Fie $(G,\bullet)$ un grup finit, A şi B două submulţimi ale sale cu proprietatea:
cardA + cardB > cardG.
Atunci pentru orice $g\in G$ există $a\in A$, $b\in B$ cu proprietatea $g=ab$.
(cardA înseamnă numărul de elemente a mulţimii A).

4. Să se determine toate legile de compoziţie "o" pe Z cu proprietatea că (Z, +, o) este inel. (+ reprezintă adunarea obişnuită a numerelor întregi).

Bareme şi soluţii

Clasa V-a

1. Start..1p
   Consideră suma: $S=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ 2p
   Descompune: S=3.37.(a+b+c) 3p
   Deduce că: 37/S.... ....2p
   Finalizare: $37|\overline{cab}$ 2p
   Total: 10p
2. Start..1p
   Scrie: $F=\frac{a+(a+1)}{a(a+1)}$ 3p
   Cunoaşte proprietatea:(a, a+1)=1..........4p
   Finalizare..........2p
   Total: 10p
3. Start..1p
   $\{1,2,3,4,5\}\subset A$; $\{1,2,3,4,5\}\subset B$ ....2+2p
   $6,7\notin A$ şi $6,7\in A\cup B\Rightarrow 6,7\in B$..........2p
   - elementele 8 şi 9 pot fi în soluţiile
     1. $8,9\in A$ şi $8,9\notin B$
     2. $8,9\notin A$ şi $8,9\in B$
     3. $8\in A$, $8\notin B$; $9\notin A$, $9\in B$
     4. $9\in A$, $9\notin B$; $8\notin A$, $8\in B$..........2p

   Scrie soluţiile:
     1. A={1,2,3,4,5,8,9}
        B={1,2,3,4,5,6,7}
     2. A={1,2,3,4,5}
        B={1,2,3,4,5,6,7,8,9}..........1p
     3. A={1,2,3,4,5,8}
        B={1,2,3,4,5,6,7,9}
     4. A={1,2,3,4,5,9}

B={1,2,3,4,5,6,7,8}

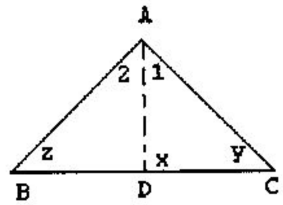
Total 10p

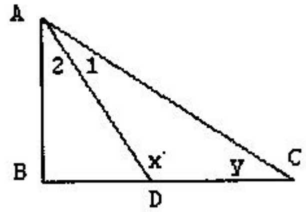
Clasa a VI-a

1. Start 1p
   $x=\overline{ab}$, $a,b\in\{0,1,\ldots,9\}$
   $10a+b=(a+b)C_1+13$, $13<a+b$ 1p
   $10a+b=C_1.C_2+3$, $3<C_1$ 1p
   Deduce $C_1(C_2-a-b)=10$ şi $C_1\in\{5,10\}$ 2p
   a) $C_1=10 \Rightarrow C_2-a-b=1 \Rightarrow -9b=13$
   nu convine 1p
   b) $C_1=5 \Rightarrow C_2-a-b=2$
   $5a=4b+13$ 1p
   5a – impar şi $a\in\{5,7,9\}$ 2p
   deduce a=9, b=8 şi x=98 .... 1p

2. Start 1p
   $p^{p-1} \vdots (p-1)^p$, $p\geq 2$ 1p
   Fie d – divizor al lui p-1 $\Rightarrow$ d – divizor al lui p 4p
   deduce d=1 .... 2p
   găseşte p=2 .... 2p

3. Start 1p
   $m(\angle ACB)<90^0 \Rightarrow m(\angle BAC)$ sau $m(\angle ABC)$ este 90^0 .... 1p
   I. $m(\angle BAC)=90^0$
   $m(\angle A_1)=m(\angle A_2)=45^0$
   deduce $\Delta BAD\equiv\Delta CAD$ şi z=y 2p
   Află $x=90^0$; $y=45^0$ şi y=z 2p





II. $m(\angle ABC)=90^0$
   $m(\angle A_1)=m(\angle A_2)+y=90^0$ 2p
   Deduce $m(\angle A_1)=m(\angle A_2)=y=45^0$,
   $m(\angle A_1)=\frac{45^0}{2}$, $x=\frac{5}{2}45^0$ şi $g=\frac{5}{2}$ 2p

4. Start 1p
   Obţine relaţia a+b+c=9 .... 1p
   Analizează cazurile:
   I. $2a\leq 8$ şi obţine $a+b+\frac{b+c-2a}{9}=6$ 2p
   deduce $2a+3b=15$, $a\in\{0,3\}$
   i) a=0, b=5, c=4
   ii) a=3, b=3, c=3 .... 2p
   II. $2a>10$
   obţine $a+b+\frac{11(b+c)-2a}{99}=6$ 2p
   deduce 86a=5.59-99.L şi a=9, b=0, c=0
   arată că nu convine 2p

Clasa a VII-a

1. Start 1p
a) scrie 2001=M1000+1 şi deduce 2001^n=M1000+1, obţine ultimele 3 cifre ale lui N: $\overline{001}$ 3p
b) scrie N-1=2001^{2001}-1=2000(2001^{2000}+ +2001^{1999}+...+2001+1) 2p
obţine că N-1=2000(M1000+1)=M10.000+2000. 3p
obţine ultimele 4 cifre ale lui N: $\overline{2001}$ 1p
Total 10p
nota: dacă elevul rezolvă corect b), fără a discuta a) primeşte totuşi punctajul maxim.

2. Start 1p
notează EF∩BD={N} şi trasează DT‖AB(T∈EF)) sau BU‖AD(U∈EF)) 1p
obţine asemănările de triunghiuri: ΔNDT~ΔNBE, ΔFDT~ΔFAE şi ΔDMF~ΔDBA 3p
obţine $\frac{BN}{DN}=\left(\frac{MB}{MD}\right)^2$ 2p
notează GH∩BD={N'} şi deduce (analog)
$\frac{BN'}{DN'}=\left(\frac{MB}{MD}\right)^2$ 1p
obţine $\frac{BN}{DN}=\frac{BN'}{DN'}$ şi deduce că
N=N'∈BD∩EF∩GH 2p
Total 10p

3. Start 1p
notează AT - bisectoarea lui ∠BAD, CU - bisectoarea lui ∠BCD (T,U∈[BD]) 2p

şi obţine cu teorema bisectoarei că $\frac{BT}{DT}=\frac{AB}{AD}$
şi $\frac{BU}{DU}=\frac{BC}{CD}$ 2p
cu relaţia din ipoteză obţine $\frac{BT}{DT}=\frac{BU}{DU}$ ⇒
T=U∈AT∩CU∩BD 1p
b) i) Construieşte DH‖AB(H∈AF) şi BG‖AD(G∈AE) 0,5p
obţine $\frac{BE}{DE}=\frac{BG}{AD}$ şi $\frac{BF}{DF}=\frac{AB}{DH}$ 0,5P
deduce asemănarea ΔABG~ΔADH şi obţine
$\frac{BG}{DH}=\frac{AB}{AD}$ 0,5p
deduce $\frac{BE}{DE}\cdot\frac{BF}{DF}=\frac{AB^2}{AD^2}$ 0,5p
ii) alege F'∈[BD] cu ∠BCE≡∠F'CD şi obţine folosind i) că $\frac{BE}{DE}\cdot\frac{BF'}{DF'}=\frac{BF^2}{CD^2}$ 2p
deduce (din ipoteză şi i)) că $\frac{BF}{DF}=\frac{BF'}{CF'}$ 1p
obţine F=F' şi ∠BCE≡∠FCD 1p
Total 10p

4. Start 1p
deduce $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+2001}$ ∈ Q 3p
obţine că (∃) k, l∈N: n=k^2, n+2001=l^2 ..... 1p
obţine ecuaţia. (l-k)(l+k)=2001 .... 1p
folosind 2001=3.23.29 obţine 4 cazuri:
{l-k=1 şi l+k=2001}, {l-k=3 şi l+k=667},
{l-k=23 şi l+k=87} şi {l-k=29 şi l+k=63} .2p

obține $n \in \{1000000, 110224, 484, 400\}$ 2p

Total 10p

Clasa a VIII-a

1. a).

start 1p

scrie identitatea

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$$ 1p

demonstreaza identitatea 1p

$$2(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2 \geq 0$$

.......................1p

concluzia 1p

b). $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)$ 1p

demonstreaza identitatea precedenta 1p

$(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$ (cu justificare) 2p

foloseste $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$ si obtine concluzia 1p

TOTAL 10 puncte

2. start 1p

$2xz+xz+2yz=10$ 1p

noteaza $a=2xz, b=xy$ si $c=2yz$ Aplica inegalitatea de la 1).b) 3p

obtine $V=\frac{5\sqrt{30}}{9}m^3$ 2p

observă că putem alege dimensiunile astfel încât $V=\frac{5\sqrt{30}}{9}m^3$ 2p

într-un astfel de acvariu se pot depozita 2500 l de apă 2p

TOTAL 10 puncte

3. start 1p

$m=0 \Rightarrow n=p=0$, cu justificare 3p

$(n=0 \Rightarrow m=p=0)$ si $(p=0 \Rightarrow m=n=0)$, cu sau fără justificare 1p

observă că m,n,p pot fi considerate numere întregi 2p

pp. prin absurd ca $m \neq 0, n \neq 0, p \neq 0$ $(m,n,p)=1$ și arată ca 2 este divizor comun al nr. m,n,p 3p

4. start 1p

figura.... ....1p

calculează volumul V al corpului obținut dupa tăierea colțurilor 6p

observă că $V>1$ și trage concluzia 2p

TOTAL 10 puncte

Clasa a IX-a

1.
Start 1p
Stabileşte prin inducţie matematică formula
$1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ 3p
stabileşte $[\sqrt[3]{n}]=k \Leftrightarrow k^3 \le n<(k+1)^3$ 2p
scrie suma sub forma
$1\cdot(2^3-1^3)+2\cdot(3^3-2^3)+...+11(12^3-11^3)+12(1+2001-12^3)$ 2p
obţine rezultatul, aplicând formula de la c 2p
Total 10p

2.
Start 1p
Scrie $x=[x]+\{x\}$ şi scrie ecuaţia sub forma
$[x]=[x]\cdot\{x\}+\{x\}^2$... .... 2p
rezolvă în raport cu {x} şi obţine:
$\{x\}=\frac{-[x]+\sqrt{[x]^2+4[x]}}{2}$ 2p
arată că [x]=0 ⇒ x=0 şi deduce ca $[x]\in N^*$ .2p
arată că $[x]^2+4[x]\in(([x]+1)^2,([x]^2+2)^2)^*$ şi deduce
că $\sqrt{[x]^2+4[x]}\notin Q$ 2p
deduce că $x=\frac{-[x]+\sqrt{[x]^2+4[x]}}{2}\notin Q$ 1p
Total 10p

3.
Start 1p
a.) .... 1+1+1=3p
b.) i. Folosind proprietatea P, obţine că
$f(6)\in\{-2,2,6\}$ 0,5p
i. Folosind proprietatea Q, obtine că
$f(6)\in\{-6,0,6\}$ 0,5p
deduce f(6)=6, de unde f(3)=3, f(4)=4 0,5p
deduce cu P si Q ca f(1)=1 .... 0,5p
ii. demonstrează prin inducţie matematică după n că
f(n)=n, ∀n∈**N** 1p
arată că g(x)=-f(-x), ∀x∈**Z** ăi
$g\in M, g(0)=0, g(2)=2 \Rightarrow g(n)=n, \forall n\in N$ 0,5p
deduce că f(k)=k ∀k∈**Z** 0,5p
c.) folosind a şi b găseşte
$M=\{f_{a,b}:Z\to Z \mid f_{a,b}(k)=ak+b, a\in\{-1,1\}, b\in Z\}$ 2p
Total 10p

4.
Start 1p
Pentru un punct O fixat găseşte vectorii:
$\overline{OM_i},\overline{ON_i},\overline{OP_i},\overline{OQ_i}$ in functie de $\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC},\overline{OD}$...... 3p
determină vectorul de poziţie $\overline{OR_1}$ al punctului R_1
al segmentului$[M_1N_1]$, cu $\frac{M_1R_1}{M_1N_1}=\frac{1}{3}$ 1p
determină vectorul de poziţie $\overline{OR_1}$ al punctului R_2
al segmentului$[P_1Q_1]$, cu $\frac{P_1R_2}{P_1Q_1}=\frac{1}{3}$ 1p
obţine că $\overline{OR_1}=\overline{OR_2}\Rightarrow R_1=R_2\in M_1N_1\cap P_1Q_1=\{R\}$....... 2p
deduce că $M_1R=\frac{1}{3}M_1N_1$ si $P_1R=\frac{1}{3}P_1Q_1$ 1p
procedează analog pentru punctele S,T,U 1p
Total 10p

Clasa a X-a

1.

Start 1p

Fie $a_n(x)=\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot x^{k-1}$ observă că

$\{a_n(x),a_m(y)\}\subset\{1,23,29,2001\}$ 2p

cazul $a_n(x)=1$, respectiv $a_m(y)=1$ conduce la soluţiile (500,0,2,1), (0,500,1,2) 4p

$a_n(x)\in\{23, 29\}$ nu conduce la soluţiile 3p

Total 10p

2.

Start 1p

Observa ca ε_k, $k=\overline{0,n-1}$ sunt afixele vârfurilor unui poligon regulat înscris în cercul unitate 2p

$\sum_{k=1}^{n}|\varepsilon_k-\varepsilon_{k-1}|$ este perimetrul poligonului < lungimea cercului = 2π 2p

calculează $|\varepsilon_k-\varepsilon_{k-1}|=2\sin\frac{\pi}{n}$ 2p

obţine prima inegalitate 2p

Total 10p

3.

Start 1p

Fie $D_k=\{x\in A\mid \exists y\in A\wedge (x,y)\in R\}$ notăm cu $|D_R|$ numărul de elemente ale lui $|D_R|$.

Dacă $|D_R|=1$ atunci $R_1=\{(1,1)\}$ este singura submulţime A lui A x A care verifică enuntul 1p

Dacă $|D_R|=2$ atunci pentru un D_R fixat, (de exemplu $D_R=\{1,2\}$), avem n submulţimi ale lui A x A care verifică enunţul 1p

Nr. submulţimilor lui A de forma {1,k}, k>1 este C_{n-1}^1

.... 1p

numărul submulţimilor $R\subset A\times A$ care verifică enunţul şi $|D_R|=2$, este $C_{n-1}^1\cdot n^1$ 1p

în cazul $|D_R|=k$, obţine $C_{n-1}^{k-1}\cdot n^{k-1}$ submulţimi R care verifică condiţiile enunţului 2p

numărul submulţimilor (cerut de enunt) este

$N=1+C_{n-1}^1 n+\ldots+C_{n-1}^{n-1}n^{n-1}=(1+n)^{n-1}$ 1p

nu există n cu proprietatea cerută (care rezultă din descompunerea lui 2001 în factori primi) 2p

Total 10p

Obs: dacă un candidat sare pasul $|D_R|=2$ poate primi punctaj maxim în cazul în care trateaza în detaliu pasul $|D_R|=k$.

4.

Start 1p

Figura 1p

Obţine relaţiile (1):

$\overrightarrow{C''A''}=\overrightarrow{C''A}+\overrightarrow{AA''}$; $\overrightarrow{B''B'}=\overrightarrow{B''B}+\overrightarrow{BB'}$; $\overrightarrow{C'A'}=\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{CA'}$ ... 3p

observă (2): $\overrightarrow{B''B}=-\overrightarrow{AA''}$; $\overrightarrow{C'C}=-\overrightarrow{BB'}$; $\overrightarrow{CA'}=-\overrightarrow{C''A}$ 2p

înlocuieşte (2) în (1) şi adună relaţiile obţinând:

$\overrightarrow{C''A''}=\overrightarrow{C''A}-\overrightarrow{B''B}$; $\overrightarrow{B''B'}=\overrightarrow{B''B}-\overrightarrow{C'C}$; $\overrightarrow{C'A'}=\overrightarrow{C'C}-\overrightarrow{C''A}$

$\Rightarrow \overrightarrow{C''A''}+\overrightarrow{B''B'}+\overrightarrow{C'A'}=\vec{0}$ 2p

concluzia 1p

Total 10p

Clasa a XI-a

1.
Start 1p
Alege reperul XOY şi reprezintă punctele
A(-a,b); B(-a,-b); C(a,-b); D(a,b) 2p
Distanţele şi relaţia din enunţ 2p
Obţine 4ax = 0 sau 4bx = 0 .... 3p
Deduce x=0 sau y=0 si M se plimbă pe axele Ox si Oy
.... 2p
Total 10p

2.
Start 1p
$X^p = 0_n \Rightarrow I - X$ inversabil 4p
$(AB)^{\min(k,m)} = 0_n$ 2p
$(A+B)^{k+m} = 0_n$ 3p
Total 10p

3.
Start 1p
$x_3 \le x_2$ 1p
$x_n \ge 1, \forall n \ge 2$ 1p
$x_{n+1} \le x_n$ (inductie) 2p
$y_{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x_n^{n-1}} + \ldots + 1} \cdot y_n + \frac{n+1}{n}$ 1p
cunoaşte criterii de convergenţă pentru şiruri de forma $y_{n+1} = a_n y_n + b_n$ 2p
$a_n = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x_n^{n-1}} + \ldots + 1} \to 0 \qquad b_n = \frac{n+1}{n} \to 1$ 1p

Clasa a XII-a

1. -start 1p
-procedează prin reducere la absurd 1p
-aplicaţia $g:[0,1] \to [0,1], g(x) = \frac{4x}{\pi} arctgx$ este bijectivă 1p
(g continuă, crescătoare, g0)=0, g1)=1)
-deduce F-surjectivă 1p
-deduce f-injectivă 1p
-deduce F- crescătoare 1p
(F′=f≥0)
-deduce F(1)=1 .... 1p
-deduce f(x)=1, ∀x∈[0,1] 1.5p
-finalizare 0.5p

2. - start 1p
- $I = \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ 2.5p
- $I = \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tgt)dt$ 2.5p
- Notează $y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tgt)dt$
- $y = \frac{\pi}{4}\ln 2 - y$ cu substituţia
$t = \frac{\pi}{4} - s, s \in [0, \frac{\pi}{4}]$ 3p
- finalizare 1p

3. - start 1p

- pentru orice $g\in G$ aplicaţia $a \rightarrow a^{-1}g$ bijectivă..............................3p
- card A_g=card$A$, unde $A_g=\{a^{-1}g : a\in A\}$, $\forall g\in G$..2p
- card A_g + card B > card $G \Rightarrow A_g\cap B\neq\Phi$, $\forall g\in G$..2p
- finalizare...2p

4. - start...1p

$$n \circ m = \underbrace{(1+\ldots+1)}_{n\text{ ori}} * \underbrace{(1+\ldots+1)}_{m\text{ ori}} = \underbrace{1*1+\ldots+1*1}_{n\cdot m\text{ ori}} = n\cdot m\cdot(1*1), \forall n,m\in N$$

..........................3p

- $n\circ m = n\cdot m\cdot(1*1), \forall n,m \in Z$ 1p
  Notez $k = 1*1$
- $n*e=e*n=n, \forall n\in Z \Rightarrow e\cdot k=1 \Rightarrow k=1 \vee k=-1$... 2.5p
- $n^\circ m=mn$ sau $n^\circ m=-nm$ satisfac $(Z,+,^\circ)$ - inel 2.5p

SPONSORI

Organizatorii mulţumesc pentru ajutorul substanţial
şi dezinteresat al firmelor:

S.C. MIBO IMPEX SRL; TEHNODOMUS SRL; S.C. BELSIRIM IMPORT EXPORT SA; S.C. METALCOMP INTERNATIONAL SRL; S.C. PRESTCON SA; S.C. ICIM SA; S.C. UNIVERSAL – CHIŞINEU CRIŞ SRL; S.C. BB COMPUTER SRL; S.C. GOLD FASHION SRL; S.C.ALTIM SRL; S.C. GISCAD SRL; S.C. NEXTNET SRL; S.C. LUTIN SRL; S.C. DONA PRIMA SRL; S.C. MODA SA; S.C. SIALBO PROD SERVICE SRL; S.C. IEDERA SRL; S.C. ACCESO SRL; S.C.PRESTCOM SA; S.C.OMNIASIG SA; S.C.ITS SRL; S.C. MARTIN SRL; S.C.TRINOM SRL,

Pentru contribuţia individuală oferită de domnii
ION MICURESCU, SIMION NEGRĂU şi MIRCEA MARCU,
şi pentru efortul deosebit al
COLEGIULUI NAŢIONAL "MOISE NICOARĂ" ARAD.

Mulţumim
Casei Corpului Didactic Arad,
tuturor şcolilor, liceelor şi grupurilor şcolare, profesorilor de matematică sau alte specialităţi, parteneri în organizarea concursului.

Fără sprijinul Dumneavoastră, "Traian Lalescu", ediţuia a XV-a, n-ar fi avut loc.