CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ " TRAIAN LALESCU"
Ediția a XIV-a , jud. Hunedoara , Deva, 7-9 aprilie 2000
Inspectoratul Școlar al județului Hunedoara
Colegiul Național " Decebal ", Deva

ATENȚIE !
Fiecare subiect se rezolvă pe coală separată.

SUBIECTE PENTRU CLASA a V -a

1. Să se afle toate numerele naturale n pentru care mulțimea

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid n < x < 2n,\ x \text{ par}\}$$

are 5 elemente.

RMT 2/2000 (M. Miheț)

2. Să se afle (cu justificare) toate numerele k cu proprietatea că două dintre numerele $k, k+1, k+2$ au doar doi divizori, iar celălalt număr are exact trei divizori.

M. Miheț

3. Produsul a m numere naturale consecutive, unde $m \geq 2$, este $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1680$. Aflați care sunt cele m numere și justificați răspunsul dat. Câte posibilități există?

Lucian Radu

SUCCES !

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ " TRAIAN LALESCU"
Ediția a XIV-a , jud. Hunedoara , Deva, 7-9 aprilie 2000
Inspectoratul Școlar al județului Hunedoara
Colegiul Național " Decebal ", Deva

ATENȚIE !
Fiecare subiect se rezolvă pe coală separată.

SUBIECTE PENTRU CLASA a VI -a

1. Numerele $x = \frac{3b+2}{2a+b}$, $y = \frac{4}{3b+2}$ și $z = \frac{2a+b}{2}$ sunt întregi și $x = y$.

a) Aflați numerele a și b știind că sunt numere întregi.

b) Aflați numerele a și b știind că sunt raționale pozitive.

(M. Mihet)
R.M.T. 2/2000

2. Care este cel mai mic număr prim care are produsul cifrelor 210 ?

Dr. R.M.T.

3. In triunghiul ABC M este mijlocul lui [BC], iar D este piciorul bisectoarei unghiului B ($D \in AC$). Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC știind că $BD \perp AM$ și $BD = DC$.

D. Mihet

SUCCES !

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ " TRAIAN LALESCU"
Ediția a XIV-a , jud. Hunedoara , Deva, 7-9 aprilie 2000
Inspectoratul Școlar al județului Hunedoara
Colegiul Național " Decebal ", Deva

ATENȚIE !
Fiecare subiect se rezolvă pe coală separată.

SUBIECTE PENTRU CLASA a VII -a

1. Fie $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$ și $z = \frac{xy}{x+y}$. Să se arate că

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \in \mathbb{Q}.$$

Alin Pogan

2. Fie a, b, c, d patru numere naturale nenule consecutive. Determinați numărul minim $k \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul

$$abcd + k$$

este pătrat perfect.

Alin Pogan

3. Fie ABC un triunghi oarecare și AD mediana din vârful A. Dreapta care unește vârful B cu mijlocul segmentului AD intersectează latura AC în punctul E. Paralela prin C la dreapta AD intersectează prelungirea laturii AB în punctul F. Arătați că D, E și F sunt coliniare.

* * *

4. Fie $ABCD$ un pătrat și d o dreaptă care trece prin vârful A. Notăm $\{P\} = d \cap BD$, $\{Q\} = d \cap BC$ și $\{R\} = d \cap CD$. Arătați că

$$AP^2 = PQ \cdot PR.$$

* * *

SUCCES !

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ " TRAIAN LALESCU"
Ediția a XIV-a , jud. Hunedoara , Deva, 7-9 aprilie 2000
Inspectoratul Școlar al județului Hunedoara
Colegiul Național " Decebal ", Deva

ATENȚIE !
Fiecare subiect se rezolvă pe coală separată.

SUBIECTE PENTRU CLASA a VIII-a

$\boxed{1}$ Să se rezolve, în mulțimea numerelor naturale nenule, ecuația

$$xyz + xy + xz + yz + x + y + z = 2000$$

Mihai Chiș

$\boxed{2}$ Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ o funcție ce verifică relația:

$$f(n) + f(n+1) + f(n+2) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Să se afle $f(50)$.

Dan Comănescu

$\boxed{3}$ Fie Π_1 și Π_2 două plane perpendiculare ce se intersectează după dreapta d. Fie $A \in \Pi_1$ și $B \in \Pi_2$ astfel încât $d(A, \Pi_2) = 1$, $d(B, \Pi_1) = 2$ și $AB = 5$. Să se determine minimul expresiei $AM^2 + BM^2$ când M se mișcă pe dreapta d.

Dan Comănescu

$\boxed{4}$ Fie o prismă hexagonală regulată dreaptă. Să se determine punctul M din spațiu pentru care suma distanțelor la cele doisprezece vârfuri ale prismei este minimă.

Dan Comănescu

SUCCES !

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ " TRAIAN LALESCU"
Ediția a XIV-a , jud. Hunedoara , Deva, 7-9 aprilie 2000
Inspectoratul Școlar al județului Hunedoara
Colegiul Național " Decebal ", Deva

ATENȚIE !
Fiecare subiect se rezolvă pe coală separată.

SUBIECTE PENTRU CLASA a IX -a

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$x^2+4x\sin(xy)+4=0.$$

Alin Pogan

2. Fie $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un hexagon convex oarecare. Pentru fiecare $i=\overline{1,6}$ notăm cu M_i mijlocul segmentului A_iA_{i+1} și cu N_i intersecția dreptelor $A_{i-1}M_i$ și $A_{i+1}M_i$ (unde $A_{-1}=A_6$, $M_{-1}=M_6$ și $A_7=A_1$). Arătați că: dreptele N_1N_4, N_2N_5 și N_3N_6 sunt concurente.

Mihai Chiș

3. Fie dat numărul $\varphi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Arătați că:

(i) dacă A, B, C sunt puncte ale unei drepte cu $C\in[AB]$ astfel încât $\frac{AC}{AB}=\varphi$, atunci

$$\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{AB}.$$

(ii) $\left[\varphi\left[\frac{n}{\varphi}+\varphi\right]+\varphi\right]=n$, pentru orice număr natural n ($[x]$ este partea întreagă a numărului real x).

Mihai Chiș

4. Fie n un număr natural nenul și $a_1,\dots,a_n$, $b_1,\dots,b_n$ numere reale pozitive cu proprietatea că toate diferențele a_i-b_i au același semn. Arătați că:

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\dots(a_n+b_n)\le 2^{n-1}(a_1a_2\dots a_n+b_1b_2\dots b_n).$$

SUCCES !

A A A

Barem de corectare și notare clasa a IX-a

1) start — 1p

scrie ecuația sub forma $x^2+4x\sin(xy)+4\sin^2(xy)+4\cos^2(xy)=0$ — 2,5p

grupează $(x+2\sin(xy))^2+(2\cos(xy))^2=0$ — 1p

obține $x+2\sin(xy)=0$ și $\cos(xy)=0$ — 1p

deduce $\sin(xy)=\pm 1$ — 1,5p

obține $x=\mp 2$, $\sin 2y=-1$ — 2p

scrie soluția — 1p

total 10p

2) start — 1p

N_i – centru de greutate $\Delta A_{i-1}A_iA_{i+1}$ — 2p

$\overline{ON}_i=\frac{1}{3}(\overline{OA}_{i-1}+\overline{OA}_i+\overline{OA}_{i+1})$ (O din plan oarecare) — 2p

$\overline{ON}_1+\overline{ON}_4=\overline{ON}_2+\overline{ON}_5=\overline{ON}_3+\overline{ON}_6$ — 2p

G – mijlocul lui $[N_1N_4]$ $\Rightarrow$ G – mijlocul lui $[N_2N_5]$ și $[N_3N_6]$ — 2p

N_1N_4, N_2N_5, N_3N_6 – concurente — 1p

10p

3) start — 1p

(i) $\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{1-\varphi}{\varphi}=\varphi$ — 3p

$\varphi^2+\varphi-1=0 \Rightarrow$ concluzia (i) — 1p

(ii) $\varphi\left[\frac{n}{\varphi}+\varphi\right]+\varphi < \varphi\left(\frac{n}{\varphi}+\varphi\right)+\varphi = n+\varphi^2+\varphi=n+1$ — 2p

$\varphi\left[\frac{n}{\varphi}+\varphi\right]+\varphi \geq \varphi\left[\frac{n}{\varphi}\right]+\varphi > \varphi\left(\frac{n}{\varphi}-1\right)+\varphi = n$ — 2p

concluzia $\left[\varphi\left[\frac{n}{\varphi}+\varphi\right]+\varphi\right]=n$ — 1p

10p

4) start — 1p

verificare $n=1$ — 1p

(verificare $n=2$) — (2p)

formularea ipotezei de inducție — 1p

pasul de inducție — 5p (3p)

finalizarea pasului de inducție — 1p

concluzia — 1p

10p

Soluții

1. $x^2+4x\sin xy+4=0.$

$x\in\mathbb{R} \Rightarrow \Delta' \geq 0 \Rightarrow \cos xy = 0$

$\Delta' = 4\sin^2 xy - 4 = -4\cos^2 xy$

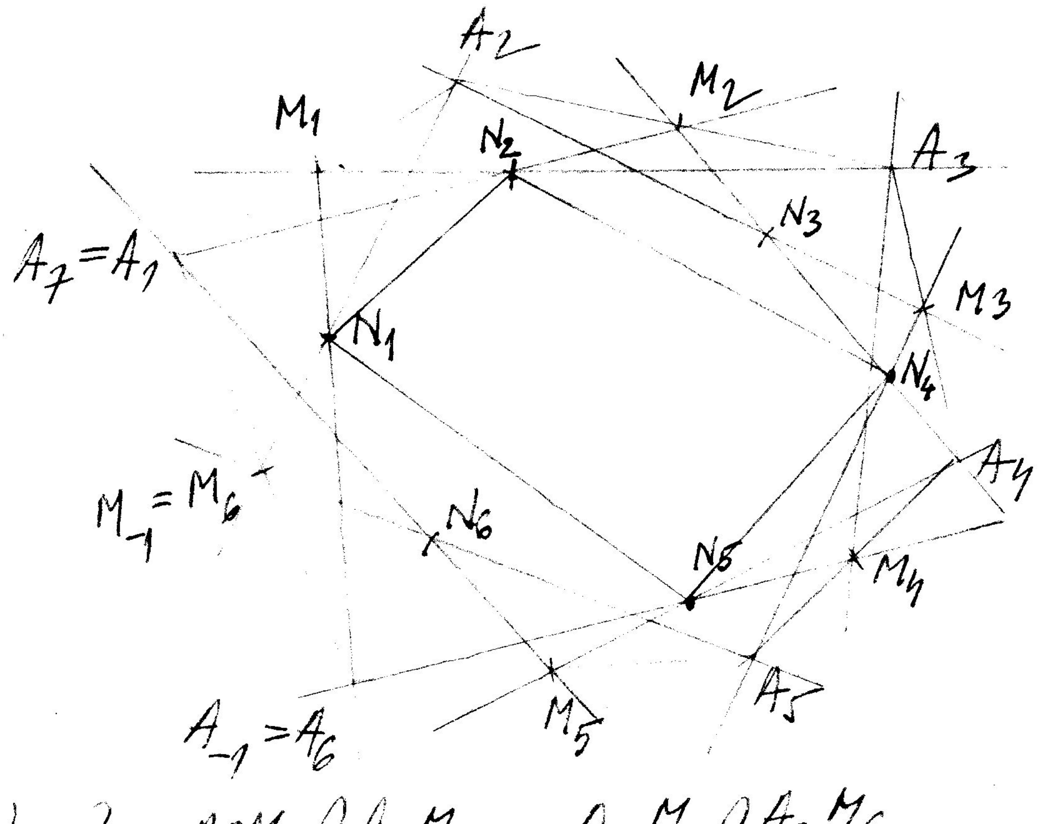
$\Rightarrow xy \in \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

$\Rightarrow x^2 \pm 4x + 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} \begin{array}{l} 2 \\ -2 \end{array}$

$x_1 = 2 \quad y_1 = \left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

$x_2 = -2 \quad y_2 = \left\{-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

2.



$\{N_1\} = A_6M_1 \cap A_2M_0 = A_6M_1 \cap A_2M_6$

$\{N_2\} = A_1M_2 \cap A_3M_1$

$\{N_3\} = A_2M_3 \cap A_4M_2$

$\{N_4\} = A_3M_4 \cap A_5M_3$

$\{N_5\} = A_4M_5 \cap A_6M_4$

$\{N_6\} = A_5M_6 \cap A_7M_5$

N_1 centru de gr. al tr. $A_1A_2A_6$

N_2 " " " al tr. $A_1A_2A_3$

N_3 " " " " " $A_2A_3A_4$

N_4 " " " " " $A_3A_4A_5$

N_5 " " " " " $A_4A_5A_6$

N_6 " " " " " $A_1A_5A_6$

$N_1N_2 \parallel A_3A_6 \Rightarrow N_1N_2 = \frac{1}{3}A_3A_6$

$N_4N_5 \parallel A_3A_6 \Rightarrow N_4N_5 = \frac{1}{3}A_3A_6$

$\Rightarrow N_1N_2N_4N_5$ paralelogram.

$\Rightarrow N_1N_4$ și N_2N_5 se înjumătățesc.

analog $N_1N_3N_4N_6$ paralelogram

$\Rightarrow N_1N_4$ și N_3N_6 se înjum.

$\Rightarrow N_1N_4, N_2N_5, N_3N_6$ sunt concurente.

4. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in (0, +\infty)$ a.î. $a_i - b_i$ au același semn. Arătați:

$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n) \le 2^{n-1}(a_1\dots a_n + b_1\dots b_n)$

<u>Rezolvare:</u>

$n=1 \quad a_1+b_1 \le a_1+b_1$

$n=2 \quad (a_1+b_1)(a_2+b_2) \le 2(a_1a_2+b_1b_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1a_2+a_1b_2+b_1a_2+b_1b_2 \le 2a_1a_2+2b_1b_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2-a_1b_2-a_2b_1 \ge 0 \Leftrightarrow$

$(a_1-b_1)(a_2-b_2) \ge 0 \quad (A)$

pres. $(a_1+b_1)\dots(a_k+b_k) \le 2^{k-1}(a_1\dots a_k+b_1\dots b_k)$ adev.

$n=k+1$

$(a_1+b_1)\dots(a_k+b_k)(a_{k+1}+b_{k+1}) \le$

$\le 2^{k-1}(a_1\dots a_k+b_1\dots b_k)(a_{k+1}+b_{k+1}) \le$

$\le 2^k(a_1\dots a_k a_{k+1}+b_1\dots b_k b_{k+1})$

vom dem că $2^{k-1}(a_1\dots a_k+b_1\dots b_k)(a_{k+1}+b_{k+1}) \le$

$\le 2^k(a_1\dots a_k a_{k+1}+b_1\dots b_k b_{k+1}) \quad | : 2^{k-1}$

$(a_1\dots a_k+b_1\dots b_k)(a_{k+1}+b_{k+1}) \le$

$\le 2(a_1\dots a_k a_{k+1}+b_1\dots b_k b_{k+1}) \Leftrightarrow$

$\cancel{a_1\dots a_k a_{k+1}} + a_1\dots a_k b_{k+1} + b_1\dots b_k \cdot a_{k+1} +$

$+ \cancel{b_1\dots b_k b_{k+1}} \le 2a_1\dots a_k a_{k+1} + 2b_1\dots b_k b_{k+1}$

$0 \le a_1\dots a_k(a_{k+1}-b_{k+1}) + b_1\dots b_k(b_{k+1}-a_{k+1})$

$0 \le (a_{k+1}-b_{k+1})(a_1\dots a_k - b_1\dots b_k) \quad (A)$

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ " TRAIAN LALESCU"
Ediția a XIV-a , jud. Hunedoara , Deva, 7-9 aprilie 2000
Inspectoratul Școlar al județului Hunedoara
Colegiul Național " Decebal ", Deva

ATENȚIE !
Fiecare subiect se rezolvă pe coală separată.

SUBIECTE PENTRU CLASA a X -a

1° Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$. Demonstrați că

$$\left| \frac{r^4 + z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}{z_1 + z_2 + z_3 + z_1 z_2 z_3} \right| = r.$$

Ioan Casu

2° Fie $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = n(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.
Determinați x_n și calculați $\sum_{n=1}^{N} \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{x_n}$ pentru $N \in \mathbb{N}^*$.

Gh. Eckstein

3° Fie A o mulțime cu $n \geq 2$ elemente și $m, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $k \leq n$, $m \leq n$.

i) Arătați că numărul soluțiilor (ordonate) $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ ale ecuației $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = A$ pentru care $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$ are m elemente este $C_n^m (2^k - 2)^{n-m}$.

ii) Demonstrați că dacă $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ atunci

$$C_n^k \cdot C_k^k + C_n^{k+1} \cdot C_{k+1}^k + \dots + C_n^n C_n^k = C_n^k \cdot 2^{n-k}$$

Dorel Miheț

4° Fie d cea mai mică dintre distanțele între muchiile opuse ale unui tetraedru și h lungimea celei mai scurte înălțimi a tetraedrului.
Demonstrați $h < 2d$.

(Olimpiadă Rusia)

~~***~~

SUCCES !

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ " TRAIAN LALESCU"
Ediția a XIV-a , jud. Hunedoara , Deva, 7-9 aprilie 2000
Inspectoratul Școlar al județului Hunedoara
Colegiul Național " Decebal ", Deva

ATENȚIE !
Fiecare subiect se rezolvă pe coală separată.

SUBIECTE PENTRU CLASA a XI -a

1. Fie $p \in \mathbb{R}$, $q \in (0,1)$, $M = \begin{pmatrix} q & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$ și $\sum_{k=0}^{n} M^k = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$.
Calculați $\lim_{n\to\infty} c_n$.

***

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel ca $AB = BA$.
a) Arătați că dacă A nu este de forma aI_2, atunci există $b, c \in \mathbb{C}$ astfel încât $B = bA + cI_2$;
b) Demonstrați că există $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| + |\beta| > 0$, astfel ca
$$\alpha(AC - CA) = \beta(BC - CB),\ \forall C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

Dorel Mihuț

3. Studiați convergența și calculați, când există, limitele șirurilor (x_n) și $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$, știind că $x_0 \neq 0$ și
$$x_{n+1} = 2x_n + \sin x_n,\ \forall n \geq 0.$$

Viorel Nadu

4. Fie (y_n) un șir mărginit și Y mulțimea punctelor $y \in \mathbb{R}$ pentru care există un subșir (y_{n_k}), $y_{n_k} \longrightarrow y$. Demonstrați că Y este un interval, dacă $y_{n+1} - y_n \longrightarrow 0$.

***

ȘUCCES !

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ " TRAIAN LALESCU"
Ediția a XIV-a , jud. Hunedoara , Deva, 7-9 aprilie 2000
Inspectoratul Școlar al județului Hunedoara
Colegiul Național " Decebal ", Deva

ATENȚIE !
Fiecare subiect se rezolvă pe coală separată.

SUBIECTE PENTRU CLASA a XII -a

1. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel și $a\in A$ astfel încât mulțimea $B=\{x\in A \mid ax=1\}$ este nevidă. Arătați că:

a) Pentru orice $x,y\in B$, $1+y-xa\in B$.

b) Dacă $b\in B$ este fixat, atunci funcția $f: B\to B$, $f(x)=1+b-xa$ este injectivă.

c) $f:B\to B$ de mai sus este surjectivă dacă și numai dacă a este inversabil.

d) Dacă B conține cel puțin două elemente distincte atunci B este infinită.

***

2. Dacă $(A,+,\cdot)$ este un inel comutativ, un element $d\in A\setminus\{0\}$ se numește divizor al lui 0 dacă există $a\in A\setminus\{0\}$ astfel încât $d\cdot a=0$.

a) Arătați că inelele comutative cu un singur divizor al lui 0 au patru elemente.

b) Aflați inelele comutative cu un singur divizor al lui 0.

Dorel Mihet

3. Fie $f,g:[0,1]\to(0,\infty)$ două funcții continue iar $(x_n)_{n\geq 0}$ un șir de numere pozitive convergent la 0.

a) Arătați că există $n_0\in\mathbb{N}$ și un șir de numere pozitive $(y_n)_{n\geq 0}$ astfel încât

$$\int_0^{x_n} f(x)\,dx=\int_0^{y_n} g(x)\,dx, \quad (\forall)\, n\geq n_0.$$

b) Dacă (y_n) este șirul de la a), arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{g(0)}{f(0)}$.

Dorel Mihet

4. a) Fie $P\in\mathbb{R}[X]$ și $Q=P-P''+P^{(4)}-\dots$. Să se arate că:

$$\int P(x)\cos x\,dx = Q(x)\sin x+Q'(x)\cos x+\mathcal{C} \quad \text{și}$$

$$\int P(x)\sin x\,dx = -Q(x)\cos x+Q'(x)\sin x+\mathcal{C},$$

b) Determinați polinoamele $P\in\mathbb{R}[X]$ cu proprietatea că există un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ astfel încât

$$\int_0^{x_n} P(x)\sin x\,dx=\int_0^{x_n} P(x)\cos x\,dx=0, \quad (\forall)\, n\in\mathbb{N}.$$

***

SUCCES !