CONCURSUL INTERJUDEȚEAN „TRAIAN LALESCU"
CARANSEBEȘ , 27.03. 1999

Clasa a V-a

1. Înlocuiți steluțele cu elemente ale mulțimii $\{2, 5, 11, 17\}$ astfel încât

$$* \cdot \{* \cdot [* \cdot (* + 1) + 1] + 1\} = 1995.$$

Există mai multe posibilități de înlocuire ? (R.M.T. 2/1999)

2. Care este ultima cifră a numerelor x și y dacă

$$x = 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 + \ldots + 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 1999$$

$$y = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + 1998\cdot 1999.$$

3. Numărul $N = 8419841984\ldots 1984198419$ are 400 de cifre. Arătați că putem șterge câteva cifre de la începutul și sfârșitul lui N astfel încât suma cifrelor rămase să fie 1984. (R.M.T. 2/1999)

4. Un elev parcurge niște trepte după algoritmul: urcă 2 trepte coboară o treaptă, urcă 3 trepte coboară 2 trepte, urcă 4 trepte coboară 3 trepte, ..., urcă 100 trepte coboară 99 trepte.

După câți pași ajunge prima dată pe treapta a 10-a
De câte ori calcă pe treapta a 10-a ?
(Un pas reprezintă urcarea sau coborârea unei trepte.)

Clasa a VI-a

1. Unghiurile ACB și COD au laturile [OA și [OC în prelungire, iar laturile [OB și [OD perpendiculare. Determinați suma celor două unghiuri știind că a) ambele sunt obtuze b) ambele sunt ascuțite.

2. Aflați numerele naturale x și y știind că

$$\frac{2}{x}=\frac{y}{16}=\frac{x}{y}.$$

3. Alegeți în fața fiecăruia din numerele 1, 2, ..., 1998 unul din semnele + sau − astfel încât numărul

$$|\pm 1 \pm 2 \dots \pm 1998|$$

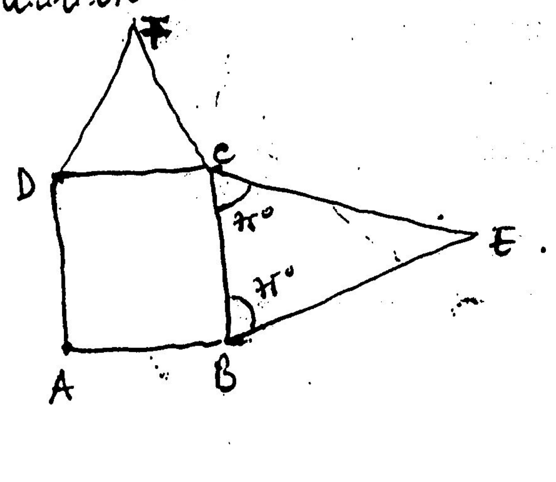
să ia cea mai mică valoare posibilă (determinați această valoare).

4. În figura de mai jos ABCD este pătrat, triunghiul DCF este echilateral, iar triunghiul BCE este isoscel cu unghiurile de la bază de măsura 75°. Demonstrați că:

a) Triunghiul ABF este isoscel

b) Triunghiul BFE este dreptunghic isoscel.

(Suma unghiurilor în orice triunghi este 180°).



CLASA A VII-A.

Fie a, b, c, d numere reale pozitive și subunitare. Arătați că:

i) $a(1-b) + b(1-c) + c(1-d) + d(1-a) < 2$

ii) $a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) < 1$.

Fie $k \in \mathbb{N}^*$ și ecuația $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_k^2 = 1999$.

i) Să se determine k maxim cu proprietatea că ecuația admite soluții cu $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k \in \mathbb{Z}^*$.

ii) Să se arate că cel mai mic k pentru care ecuația are soluții întregi este $k=4$.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Să se arate că dacă $a+b \geq 2$ atunci $a^4 + b^4 \geq 2$.

În trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) notăm cu P punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor A și D și cu Q punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor B și C. Arătați că:

i) P, Q și mijloacele laturilor (AD) și (BC) sunt coliniare.

ii) Cele patru bisectoare sunt concurente dacă și numai dacă $AB + CD = AD + BC$.

CLASA a VIII-a

1. Fie $a \in \mathbb{R}$. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ce satisfac:

$$f(x)\cdot f(y) - a|x-y| = f(x) + f(y) - 1 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Să se determine $x, y, z \in [0, \infty)$ astfel încât

$$4x + 8y + 12z = 5997$$
$$12x + 8y + 4z = 1999$$

3. Fie $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$ un cub de latura 1. Fie M, N în interiorul cubului. Notăm cu $a = MN$ și $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ lungimile proiecțiilor segmentului MN pe fețele cubului. Să se arate că:

$$a\sqrt{8} \le x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le a\sqrt{24}$$

4. Fie A, B, C trei puncte distincte în spațiu și un plan π ce nu conține nici unul dintre puncte. Să se determine $P, Q \in \pi$ astfel încât $AP + PB + BQ + QC$ este minimă. În ce condiții P coincide cu Q?

CLASA A VIII-A

BAREM DE CORECTARE

1. START - - - - - - - - - 1p

SE ALEGE $x=y$ - - - - - - - - - 1p

DEDUCE CĂ DACĂ f SATISFACE RELAȚIA DATĂ ATUNCI $f(x)=1\ \forall x \in R$ - - - - 4p

VERIFICĂ SOLUȚIA - - - - - - - - - 1p

$a=0 \Rightarrow f(x)=1\ \forall x \in R$ - - - - - 1,5p

$a \neq 0$ NU EXISTĂ FUNCȚII CU PROPRIETATEA DATĂ - - - - - - - - - 1,5p

TOTAL 10p

2. START - - - - - - - - - 1p

SISTEMUL ESTE ECHIVALENT CU

$4x+8y=5997-12z$

$12x+8y=1999-4z$ - - - - - 1p

REZOLVĂ SISTEMUL ÎN x ȘI y - - - - - 3p

PUNE CONDIȚIILE $x \geq 0$ ȘI $y \geq 0$ - - - - - 1p

DEDUCE $z=\frac{1999}{4}$ - - - - - - - - 3p

DEDUCE $x=y=0$ - - - - - - - - - 1p

TOTAL 10p

$\boxed{3}$ START — — — — — — — — — 1p

REMARCĂ $x_1 = x_4$, $x_2 = x_5$, $x_3 = x_6$
UNDE x_1, x_4 (RESPECTIV x_2, x_5 și x_3, x_6)
SUNT PROIECȚIILE PE FEȚE OPUSE — — — 2p

OBSERVĂ $2a^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ — — — — — 3p

DEDUCE $x_1 + x_2 + x_3 \geq \sqrt{2}\, a$ — — — — — 1p

DEDUCE $x_1 + x_2 + x_3 \leq \sqrt{6}\, a$ — — — — — 2p

DEMONSTREAZĂ REZULTATUL — — — — 1p

TOTAL 10p

$\boxed{4}$ START — — — — — — — — — 1p

CONSTRUIEȘTE B' SIMETRICUL LUI B
FAȚĂ DE π ȘI REMARCĂ $SB = SB'$
$\forall S \in \pi$ — — — — — — — — — 2p

GĂSEȘTE $P = \begin{cases} AB \cap \pi & \text{DACĂ } \pi \text{ SEPARĂ } A \text{ ȘI } B \\ AB' \cap \pi & \text{DACĂ } \pi \text{ NU SEPARĂ } A \text{ ȘI } B \end{cases}$

$Q = \begin{cases} BC \cap \pi & \text{DACĂ } \pi \text{ SEPARĂ } B \text{ ȘI } C \\ B'C \cap \pi & \text{DACĂ } \pi \text{ NU SEPARĂ } B \text{ ȘI } C \end{cases}$ — — — 4p

GĂSEȘTE CONDIȚIILE ÎN CARE P COINCIDE CU Q — — 3p

TOTAL 10p

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN "TRAIAN LALESCU"

CARANSEBEȘ, 27.03 1999

clasa a IX-a

Enunțuri

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că

$$-2 < \sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n < 2$$

2. Construiți o funcție bijectivă $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

3. Arătați că nu există o constantă $L > 0$ astfel încât

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x - y|, \ \forall x > 0, y > 0$$

4. Fie ABC un triunghi echilateral. Determinați locul geometric al punctelor M din interiorul triunghiului ABC care verifică condiția

$$m(\widehat{MAB}) + m(\widehat{MBC}) + m(\widehat{MCA}) = 90^\circ.$$

Barem de notare
la clasa a IX-a

[...]iectul 1 • start (1p)

•• $\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n = \dfrac{\cos\frac{1}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}$ (4p)

••• $\left|\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n\right| \le \dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}}$ (2p)

•••• $\dfrac{1}{2} < \dfrac{\pi}{6} \Longrightarrow \sin\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}$ (2p)

••••• obține concluzia (1p)

[...]iectul 2 • start (1p)

•• construiește o funcție bijectivă între $\mathbb{Z}$ și $\mathbb{N}$ (4p)

••• construiește o funcție bijectivă între $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (2p)

[...] construiește o funcție bijectivă între $\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (2p)

Construiește o bijecție între $\mathbb{N}$ și $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ (1p)

[...]iectul 3 • start (1p)

•• procedează prin reducere la absurd (2p)

• $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \le L,\ \forall x>0, \forall y>0,\ x\ne y$ (3p)

••• ajunge la contradicție alegând în mod convenabil pe x și y. (4p)

[...]iectul 4 • start (1p)

punctele de pe o mediană verifică condiția (3p)

reuniunea medianelor triunghiului este parte locului geometric (1p)

punctele din interiorul triunghiului care nu se află pe mediane nu satisfac condiția din enunț (5p)

Concursul interjudețean „TRAIAN LALESCU".
Caransebeș, 27 martie 1999.
<u>Clasa a X-a.</u>

1° Fie $x_1 = 2$ și $x_{n+1} = \dfrac{x_n^3 + 4}{5x_n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.
Să se demonstreze că $x_n \in \left(\frac{5}{6}, \frac{6}{5}\right]$, $(\forall)\ n \geq 2$.

2° Să se determine funcțiile $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ pentru care
$$\lg(xy) \leq x f(x) + y f(y) \leq xy f(xy),\ (\forall)\ x, y \in (0, \infty).$$

3° Fie $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ unde $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că ecuația
$$X \cup Y \cup Z = A,$$
în care două soluții care diferă doar prin ordinea termenilor se consideră egale, are
$$\frac{7^n + 3^{n+1} + 2}{6}$$
soluții distincte.

4. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ se secționează cu planele $ACC'A'$, $AD'C'B$, $AB'C'D$. Câte poliedre se obțin? (Justificați răspunsul!).

Timp de lucru: 3 ore

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE – clasa a X a.

$x_n > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ . . . . (1p)

$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{5} + \frac{2}{5x_n} + \frac{2}{5x_n} \geq \frac{3}{5}\sqrt[3]{4} > \frac{5}{6}$ . . . . (4p)

$x_n \in (\frac{5}{6}, 1) \Rightarrow x_{n+1} < \frac{1+4}{5x_n} = \frac{1}{x_n} < \frac{6}{5}$ . . . . (2p)

$x_n \in [1, \frac{6}{5}] \Rightarrow x_{n+1} - x_n = \frac{(x_n-1)(x_n^2-4x_n-4)}{5x_n} \leq 0 \Rightarrow x_{n+1} \leq \frac{6}{5}$ . . . (2p)

start . . . (1p)

$x = y = 1 \Rightarrow f(1) = 0$ (1p) $y = 1 \Rightarrow \lg x \leq x f(x)$ (*) ... (2p);

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow f(\frac{1}{x}) = -x^2 f(x)$ (2p); $y = +\frac{1}{x^2} \Rightarrow \lg x \geq x f(x)$. (**) (2p)

Din (*) şi (**) se obţine $f(x) = \frac{\lg x}{x}$ (1p) f găsită verifică condiţiile din enunţ (1p)

start (1p)

• numărul tripletelor ordonate (X, Y, Z) cu $X \cup Y \cup Z = A$ este 7^n . . . . . (2p)

• numărul tripletelor ordonate $(X, X, Y), (X, Y, X), (Y, X, X)$ cu $X \neq Y$ este $3(3^n - 1)$ . . . . . (2p)

• (A, A, A) e soluţie a ecuaţiei din enunţ

• numărul tripletelor ordonate cu $X \neq Y, Y \neq Z, Z \neq X$ este

$7^n - 3(3^n - 1) - 1 = 7^n - 3 \cdot 3^n + 2 = \alpha$ . . . . . (2p)

• nr. soluţiilor ecuaţiei cu $X \neq Y, Y \neq Z, Z \neq X$ este

$\frac{\alpha}{6} = \frac{7^n - 3 \cdot 3^n + 2}{6}$ . . . . (1p)

• nr. sol. de forma $(X, X, Y), \ldots$, cu $X \neq Y, \ldots$ este $\frac{3(3^n - 1)}{3}$ . . . (1p)

• nr. total al soluţiilor ecuaţiei în condiţiile din enunţ este

$\frac{7^n - 3 \cdot 3^n + 2}{6} + 3^n - 1 + 1 = \frac{7^n + 3^{n+1} + 2}{6}$ – – – (1p)

start (1p)

cele trei plane se intersectează după dreapta AC' . . . . (3p)

cele trei plane împart spaţiul în 6 regiuni – – – – (3p)

intersecţia dintre fiecare regiune şi cub este un poliedru, deci se obţin 6 poliedre . . . . . . (3p)

start (1p)

Concursul interjudețean Traian Lalescu
Caransebeș, 27.03.1999

CLASA A XI-A

① Să se determine mulțimea
$$M = \{ (x_0, x_1) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \}$$
știind că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, pentru care
$$x_{n+2} = x_{n+1}^{1999} x_n^{2000}, \forall n \geq 0,$$
este convergent

② Să se calculeze, atunci când există, limitele

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^{x-2k} \sin^2 x$ ($k \in \mathbb{N}$ este fixat)

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} |\sin i|$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right)^{\frac{k}{n\sqrt{n}}} \sin^2 \frac{k}{n\sqrt{n}}$

③ Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(A_1) $\exists$ $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^p = O_2$

(A_2) $\exists$ $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $A = a\begin{pmatrix} \cos b & 1+\sin b \\ -1+\sin b & -\cos b \end{pmatrix}$

④ Se dau punctele $A(2a, 0)$, $B(a+c, b)$, $C(2c, 2b)$ și $D(-2a, 0)$, unde $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ sunt fixate. O dreaptă variabilă d trece prin originea axelor și $A, B \notin d$. Să se determine coordonatele punctelor $L \in AN \cap DM$, unde $M \in d \cap AC$ și $N \in d \cap DC$. Interpretați rezultatul.

CLASA a XI-a

Barem de corectare

1. start 1p

$x_0=0$ sau $x_1=0 \Rightarrow x_n=0,\ \forall n\geq 1$ 0,5p

$x_0\neq 0$ și $x_1\neq 0 \Rightarrow x_n\neq 0,\ \forall n\geq 0$ 0,5p

$\ln x_{n+2} = 1999 \ln x_{n+1} + 2000 \ln x_n$ 2p

$r^2 = 1999 r + 2000 \Rightarrow r_1 = 2000,\ r_2 = -1$

$x_n = e^{\alpha\cdot 2000^n + \beta(-1)^n}$ 2p

$\alpha > 0 \Rightarrow x_n \to \infty$ nu converge 1p

$\alpha = 0 \Rightarrow x_n = e^{\beta(-1)^n} \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow x_0 = x_1 = 1$ 1p

$\alpha < 0 \Rightarrow x_n = e^{2000^n\left(\alpha + \frac{\beta(-1)^n}{2000^n}\right)} \to 0$ 1p

$M = \{(x_0,x_1)\ |\ x_0\geq 0, x_1\geq 0, x_1x_0<1\} \cup \{(1,1)\}$ 1p

10p

2. start 1p

a) $x^{x-2k}\cdot \sin^2 x = x^x \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot \frac{1}{x^{2k-2}}$

$x^x \to 1,\ \frac{\sin x}{x} \to 1 \Rightarrow l = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^{2k-2}} = \begin{cases} 0, & k=0\\ 1, & k=1\\ \infty, & k\geq 2\end{cases}$ 2p

b) $x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} |\sin i| \Rightarrow x_{n+1} - x_n = |\sin(i+1)| \geq 0 \Rightarrow x_n$ crescător 1p

Presupunem x_n mărginit $\Rightarrow x_n$ convergent $\Rightarrow |\sin n| \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |\cos n| \to 1 \Rightarrow |\sin(n+1)| = |\sin n \cos 1 + \sin 1 \cos n| \to 1$ absurd

Deci x_n nemărginit $\Rightarrow x_n \to \infty$. 2p

c) $g(x) = x^x \sin^2 x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2} = 1$ 2p

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$ a.î. $1-\varepsilon < \frac{g(x)}{x^2} < 1+\varepsilon,\ \forall x\in(0,\delta)$

$0 < \frac{k}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \delta$ pentru $n\geq n_0$

$\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right)^2\right](1-\varepsilon) < \sum\limits_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) < \left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right)^2\right](1+\varepsilon)$ 1p

$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) \to \frac{1}{3} \end{array}\right\}$ 1p

10p

CLASA XI -

3 start 1p

$(A_1) \Rightarrow (A_2)$

$$A^2 = uA - v I_2$$

$$A^p = O_2 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow A^2 = uA \Rightarrow A^p = u^{p-1} \cdot A$$ 2p

Dacă $u \neq 0 \Rightarrow A = O_2$ imposibil 1p

Dacă $u = 0 \Rightarrow A^2 = O_2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ cu $x^2 + yz = 0$ 2p

$$y = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} = -\frac{z}{2} \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 1 + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ -1 + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$ 1p

$$y \neq 0 \Rightarrow A = a \begin{pmatrix} \frac{2t}{1+t^2} & \frac{2}{1+t^2} \\ -\frac{2t^2}{1+t^2} & -\frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

$$t = \operatorname{tg} x \Rightarrow b = \frac{\pi}{2} - 2x$$ 2p

$(A_2) \Rightarrow (A_1)$

$A^2 = O_2$ prin calcul direct 1p

4 start 1p

$d: y = mx, \; m \neq 0, \; m \neq \frac{b}{a+c}$ 1p

$$AC: \; y = \frac{b}{c-a}(x - 2a)$$

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{2ab}{b - mc + ma} \\ y_M = \dfrac{2abm}{b - mc + ma} \end{cases}$$ 2p

$$CD: \; y = \frac{b}{c+a}(x + 2a)$$

$$\begin{cases} x_N = \dfrac{2ab}{mc + ma - b} \\ y_N = \dfrac{2abm}{mc + ma - b} \end{cases}$$ 2p

$$DM: \; y = \frac{bm}{2b - mc + ma}(x + 2a)$$

$$AN: \; y = \frac{bm}{2b - mc - ma}(x - 2a)$$

$$\begin{cases} x_L = -2c + \dfrac{4b}{m} \\ y_L = 2b \end{cases}$$

$$m = \frac{b}{a+c} \Rightarrow -2c + \frac{4b}{m} = 2c + 4a$$ 2p

L descrie dreapta de ecuație $y = 2b$ exceptând $L_0(2c + 4a, 2b)$ ... 1p

10 p

CLASA a XII-a

1. Fie $\mathcal{M}$ mulțimea funcțiilor $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue cu $f(0)=0$, $f(1)=1$. Demonstrați că

$$\int_0^1 |f'(x)-f(x)|\,dx \geq \frac{1}{e}\ ,\ (\forall)\, f\in\mathcal{M}.$$

2. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietățile:

(i) f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$; $f(1)=1$

(iii) $x f(x)=\int_0^1 \frac{f(xt)}{t}\,dt\ ,\ (\forall)\, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Să se arate că:

a) f este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

b) f satisface egalitatea

$$x^2 f'(x)+(x-1)f(x)=0\ ,\ (\forall)\, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

c) Să se determine funcția care are proprietățile de mai sus.

3. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel comutativ unitar cu $1+1\neq 0$ iar $\mathcal{D}$ mulțimea divizorilor lui zero. Considerăm mulțimea $\mathcal{G}=\{x\in\mathcal{D}\mid 2x=0\}\cup\{0\}$. Demonstrați că $(\mathcal{G},+)$ este grup abelian.

4. Fie $(G,\cdot)$ un grup multiplicativ de ordin finit. Următoarele afirmații sunt echivalente

a) G este de ordin impar

b) Pentru orice $a\in G$, ecuația $x^2=a$ are soluție unică în G.