CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"

Timişoara 14-15 martie 1998

CONCURSUL TRAIAN LALESCU

TIMIȘOARA 1998

Cl. a V-a

I. La gara Timișoara se eliberează trei bilete de tren: unul pentru Arad, altul pentru Deva și al treilea pentru Reșița. Cel pentru Deva costă de 3 ori mai mult decât biletul pentru Arad. Biletul pentru Reșița costă cu 9.000 lei mai mult decât cel pentru Arad, iar biletul pentru Deva cu 7.000 lei mai mult decât biletul pentru Reșița. Cât costă fiecare bilet?

II. Să se determine toate numerele naturale de forma $\overline{xyz}$ (cu $x, y, z$ nu neapărat distincte) divizibile cu 6 și având proprietatea: $x + y = z$. ($\overline{xyz}$ este scris în baza 10).

III. Să se determine numerele prime care se pot scrie atât ca sumă cât și ca diferență de două numere prime.

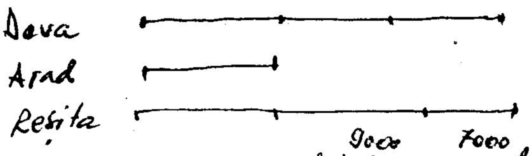
IV. Să se determine cifrele $x, y, z, t$ (nu neapărat distincte și considerate în sistemul de numerație cu baza zece) astfel încât să avem:

$$\frac{1}{x+y+z+t} = \frac{\overline{xyz}}{10^4}$$

Timp de lucru 3 ore

# Barem de corectare
## cl. a V-a

I. Start ........................................ 1




............................................ 3

Dublul biletului pentru Arad va fi 9000 + 7000 = 16.000 ... 2

Biletul pentru Arad 8.000 ........................ 2

Biletul pentru Reșița 17.000 ...................... 1

— " — Deva 24.000 ................................. 1

TOTAL: 10

II. Start.

$x+y+z \vdots 3$ .................................. 1

$2 \cdot z \vdots 3$ ............................... 1

$z \in \{3, 6, 9,\}$ ............................... 1

$z = 6$ ............................................ 2

156, 516 ........................................... 1

246, 426 ........................................... 1

336, 606 ........................................... 2

TOTAL: 10

III. Start ......................................... 1

$p$ este impar $(p > 2)$ ............................ 2

$p = q + 2$, $p = r - 2$ ($q$, $r$ prime) ............ 2

$p-2$, $p$; $p+2$ prime ............................. 1

unul este divizibil din trei numere naturale, ~~consecutive impare~~ impare consecutive cu 3 .. 2

$p = 5$ singura soluție ............................. 2

TOTAL: 10

IV. Start ........................................... 1

$\overline{xyz}\,(x+y+z+t) = 10^4$ ...................... 1

$\overline{xyz} \mid 2^4 5^4$ ............................. 1

$\Rightarrow \overline{xyz} \in \{2^2 5^2;\ 2^3 5^2;\ 2^4 5^2;\ 5^3;\ 2 \cdot 5^3;\ 2^2 5^3;\ 5^4 = 625\}$ ........ 3

Examinându-le pe rând, pentru determinarea cifrei $t$, găsim corespunzător numai cazul $\overline{xyz} = 625$ ........ 2

Răspuns $x = 6$, $y = 2$, $z = 5$, $t = 3$ ................ 2

TOTAL: 10

# CONCURSUL TRAIAN LALESCU
## TIMIȘOARA 1998
## CLASA a VI-a

I Să se arate că numărul
$$A = 2^{1998}(2^{1998}-1)+1970$$
are ultimele două cifre 98.

Luminița și Bogdan Sasu.

II Să se determine numerele naturale $\overline{abc}$ astfel încât să fie îndeplinite simultan următoarele condiții:
a) suma cifrelor sale să fie egală cu 5;
b) suma cuburilor cifrelor sale să fie egală cu cubul unui număr prim de forma $4k+1$ cu $k \in \mathbb{N}$
(prin cubul unui număr se înțelege puterea cu exponentul trei a numărului respectiv)

Gh. Ivan

III Fie M un punct interior triunghiului isoscel ABC (AB = AC). Să se arate că AM este perpendiculară pe BC știind că:
$$\frac{m(\widehat{MBA})}{m(\widehat{MBC})} = \frac{m(\widehat{MCA})}{m(\widehat{MCB})} = 2$$

* * *

IV. Să se determine numerele întregi $x, y, z, u, v, w$ astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:
1) $\overline{0,ab(c)} + \overline{0,bc(a)} + \overline{0,ca(b)} = 1$, unde $a, b, c$ sunt cifre scrise în baza 10 încât $0 < a < b < c$;
2) $\dfrac{x+u}{\overline{0,ab(c)}} = \dfrac{y+v}{\overline{0,bc(a)}} = \dfrac{z+w}{\overline{0,ca(b)}}$
3) $x, y, z$ sunt numere prime astfel încât $x+y+z$ este cel mai mic număr natural par cu proprietatea $x<y<z$.

* * *

CONCURS TRAIAN LALESCU

TIMIȘOARA 1998

- CLSA VI-a

I. Start - - - - - - - - - - (1p.)

A are ultimele două cifre 98 $\Leftrightarrow$ $A-98$ este divizibil cu 100 (2p)

Notăm $B = A-1998$ rezultă $A-98 = B+1900$ avem

$B = 2^{1998}(2^{1999}-1)-28$ și arătăm că B se divide cu 100 (1p)

Cum $B = 2^{4\cdot 499+2}(2^{4\cdot 499+3}-1)-28 = 2^2[2^{4\cdot 499}(2^{4\cdot 499+3}-1)-7] \vdots 4$ (rel 1)

arătăm că $C = 2^{4\cdot 499}(2^{4\cdot 499+3}-1)-7 \vdots 25$ - - - - - (1p)

Dar $C = (2^{4\cdot 499}-1)[(2^{4\cdot 499}-1)\cdot 8+15]$ (rel 2) - - - - - - (1p)

Cum $2^{4n}$ are ultima cifră 6, $(\forall) n \geq 1$ rezultă

că $(2^{4\cdot 499}-1) \vdots 5$. conform (2)

$C \vdots 25$ (rel 3) - - - - - - - - - - - - - (3p)

Din (1) și (3) avem că $B \vdots 100$

(1p)

II Start - - - - - - - - - - (1p)

Din a, b, c cifre încât $a+b+c=5 \Rightarrow 1 \leq a^3+b^3+c^3 \leq 3\cdot 5^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow p \in \{2, 3, 5, 7\}$ - - - - - - - - - - (3p)

Din p prim de forma $4k+1$ deduce $p=5$ - - - - - - (1p)

Avem $\begin{cases} a+b+c=5 \\ a^3+b^3+c^3=5^3 \end{cases}$

Deosebim cazurile

$a=1 \Rightarrow \begin{cases} b+c=4 \\ b^3+c^3=124 \end{cases} \Rightarrow$ nu are soluție - - - - (1p)

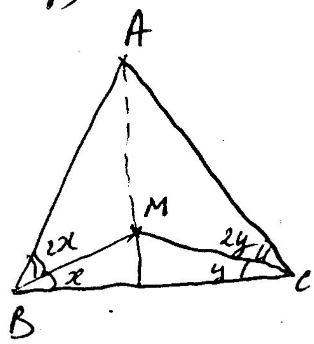
$a=2 \Rightarrow \begin{cases} b+c=3 \\ b^3+c^3=117 \end{cases} \Rightarrow$ nu are soluție - - - - - (1p

$a=3 \Rightarrow$ nu are soluție - - - - - (1p)

$a=4 \Rightarrow$ nu are soluție - - - - - (1p)

$a=5 \Rightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ b^3+c^3=0 \end{cases} \Rightarrow b=c=0 \Rightarrow \overline{abc}=500$ - - - - (1p)

III Start ------------------------ (1p)




Notăm $m(\widehat{MBC}) = x$ și $m\ \widehat{MCB} = y$

Din ipoteză deduce $m(\widehat{MBA}) = 2x$

$m(\widehat{MCA}) = 2y$ ----- (2p)

Din $\Delta ABC$ isoscel deduce $x = y$ ----- (1p)

$\Delta\ MBC$ isoscel ----- (1p)

$\Delta\ AMB \equiv \Delta\ AMC$ ----- (2p)

Deducem $m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{MAC})$ ----- (1p)

Rezultă AM bisectoare în $\Delta\ ABC$ isoscel (1p)

Deduce $AM \perp BC$ ----- (1p)

IV Start ------------------------ (1p)

Din (1) deduce $a+b+c = 9$ ----- (3p)

Deduce ($\alpha$) $a = 1,\ b = 2,\ c = 6$ ----- (0,5p)

($\beta$) $a = 1;\ b = 3,\ c = 5$ ----- (0,5p)

($\gamma$) $a = 2,\ b = 3,\ c = 4$ ----- (0,5p)

Din (3) deduce $x = 2,\ y = 3,\ z = 5$ (1,5p)

Pentru cazul $\alpha$ deduce $u, v, w$ (1p)

cazul $\beta$ deduce $u, v, w$ (1p)

cazul $\beta$ deduce $u, v, w$ (1p)

Concursul „Traian Lalescu"
Timișoara 1998

clasa a VII-a.

I. a) Să se arate că $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

b) Să se determine $n\in\mathbb{N}$ astfel încât numărul

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

să fie număr rațional.

* * *

II Fie triunghiul $A_nB_nC_n$ cu lungimile laturilor

$a_n=2^{n+1}+2^n+2^{n-1}$, $b_n=2^n+2^{n-1}+2^{n-2}$, $c_n=\sqrt{147}\cdot 2^{n-2}$.

$n\in\mathbb{N}$. Să se arate că triunghiurile $A_nB_nC_n$ și $A_pB_pC_p$. $n,p\in\mathbb{N}$ sunt asemenea.

* * *.

III. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se arate că cercurile înscrise în triunghiurile $ABC$ și $ACD$ sunt tangente, dacă și numai dacă

$$AB+CD=AD+BC$$

***.

IV. Arătați că există $k\in\mathbb{Z}$ astfel încât numerele

$$x=\frac{3}{k}+\frac{2}{k-1} \quad \text{și} \quad y=\frac{3}{k-2}+\frac{5}{k+2}$$

să fie simultan întregi

* * *.

Timp de lucru 3 ore.

# CONCURSUL "TRAIAN LALESCU"
## TIMIȘOARA, 1998.
## Clasa a VIII-a

I. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1, \pm 3\} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3}.$$

1) Determinați mulțimea $M = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 0\}$.

2) Verificați dacă $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in M$.

3) Calculați $f(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

II. Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$2(x^2+y^2)+5xy = 3998.$$

III. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC cu $\hat{A} = 90°$, $n$ perpendiculara în B pe planul (ABC) și $M \in n$ un punct arbitrar. Fie $P \in AM$, $Q \in CM$ proiecțiile ortogonale ale punctului B pe dreptele AM resp. CM. Demonstrați că:

1) $CM \perp (BPQ)$;

2) dreapta PQ trece printr-un punct fix.

IV. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ ($AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ sînt muchii perpendiculare pe planul $(ABCD)$) cu latura $a$.

→ verso

1) Fie P mijlocul segmentului (B'C) şi Q proiecţia ortogonală a lui P pe diagonala BD' a cubului. Demonstraţi că $PQ \perp B'C$; calculaţi lungimea PQ în funcţie de a.

2) Demonstraţi că punctele A, Q, P sînt coliniare.

* * *

Timp de lucru: 3 ore.

# CONCURSUL TRAIAN LALESCU
# TIMIȘOARA 1998
# CLASA A IX-A

I a) Se consideră funcțiile de gradul 2, $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, date prin: $f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $(a\cdot\alpha\neq 0)$. Dacă $x_1,x_2$, respectiv $y_1,y_2$ sunt rădăcinile lui f și g, atunci să se stabilească în ce caz are loc relația:

$$\alpha^2\frac{f(y_1)}{g(x_1)}=a^2\frac{g(x_2)}{f(y_2)}.$$

b) Să se determine valorile lui $m\in\mathbb{R}$, astfel încât rădăcinile reale distincte ale ecuațiilor $x^2-x+m=0$ și $x^2+2x+m=0$ să se separe.

(Ion D. Albu)

II Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a(x+1)^2+b-a$, $a,b\in\mathbb{Z}$, $(2|b|<|a|)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Să se determine toate valorile lui a și b pentru care ecuația $f(x)=0$ are rădăcinile întregi.

(Ion D. Albu)

III Să se arate că un triunghi care are două bisectoare congruente este un triunghi isoscel.

* * *

IV Fie triunghiul dreptunghic $\triangle ABC$ $(m(\hat{A})=90)$. Se consideră un punct $M\in AB$, astfel încât $AM\cdot AB=AC^2$. Să se afle locul geometric al proiecției lui M pe BC, dacă vârfurile A și C sunt fixe, iar B este variabil.

(Ion D. Albu)

Timp de lucru 3 ore

CONCURSUL „TRAIAN LALESCU", TIMIȘOARA

# BAREM DE CORECTARE

## clasa a IX-a

I Start ---------------- 1 p.

a) Scrie $\alpha^2 f(y_1) f(y_2) = a^2 g(x_1) g(x_2)$ -------- 0,5p

Face înlocuirile în relație -------- 1,5p

Grupează termenii și utilizează relațiile lui Viète. -------- 1,5p

Constată că relația este o identitate ------ 0,5p

b) Scrie condițiile de separare a rădăcinilor $(x_1 < y_1 < x_2 < y_2$ sau $y_1 < x_1 < y_2 < x_2)$

$\begin{cases} f(y_1) f(y_2) < 0 \\ \Delta_1 > 0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} g(x_1) g(x_2) < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases}$ ------ 2p

Scrie una din condiții, sub forma

$\begin{cases} (y_1^2 - y_1 + m)(y_2^2 - y_2 + m) < 0 \\ 1 - 4m > 0 \end{cases}$ -------- 1p

Exprimă prima inecuație în funcție de suma și produsul rădăcinilor, pe care le înlocuiește în funcție de $m$ și rezolvă sistemul de inecuații --- 1,5p

Observă că obține același rezultat, tratând cealaltă alternativă ---------- 0,5p

Total 10p.

II Start -------------- 1p

Exprimă $f(x)$ sub forma generală și pune condițiile ca rădăcinile să fie întregi, găsind $b = a(1 - a^2 q^2)$, $q \in \mathbb{Z}$. ------ 4p

Exploatează condiția $2|b| < |a|$ și găsește $a^2 q^2 \in \{0, 1\}$, discutând toate variantele posibile ------ 5p

Total 10p.

BAREM DE CORECTARE CLASA ...

**III**

Start - - - - - - - - 1p

$AM \cdot AB = AC^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta ACM$ - - - - - 2p

Deduce $\widehat{AMC} \equiv \widehat{ACB}$ - - - - - - 0,5p

$MP \perp BC$, $P \in BC$ și $MP \cap AC = \{C_1\}$ - - - - - 1p

Observă că $\Delta MC_1C$ este isoscel - - - - 2p

Deduce că $C_1$ este un punct fix - - - - - 1p

$P \in \mathcal{C}(C_1C)$ și stabilește locul geometric - - - - 2,5p

Total 10p.

**IV**

Start - - - - - - - - 1p

- Scrie relația lui Stewart pentru lungimile a două bisectoare - - - - 2p
- Calculează lungimile segmentelor determinate de bisectoare pe laturile opuse în funcție de lungimile laturilor triunghiului - - - - 2p
- Scrie egalitatea bisectoarelor - - - - 1p
- Face transformările - - - - 3p
- Găsește egalitatea a două laturi - - - 1p

Total 10p.

prof. dr. I. D. Albu

# CONCURSUL TRAIAN LALESCU

## TIMIȘOARA 1998

## CLASA a X^a

I. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\sum_{k=2}^{n+1}\left(\log_{\frac{1}{k}}\frac{2}{2k+1}+\log_{\frac{1}{k+1}}\frac{2}{2k+1}\right)>2n$$

(Luminița și Bogdan Sasu)

II. Să se arate că numărul:

$$N=\frac{(1+2+\dots+n)!}{1!\,2!\cdot\ldots\cdot n!}$$

este natural pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$

(***)

III. Fie $x\in\mathbb{R}$ astfel încât:

$$\sin x+\cos x\in\mathbb{Q}$$

să se demonstreze că:

$$\sin^n x+\cos^n x\in\mathbb{Q}$$

oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

(***)

IV. Se dă un triunghi ABC și punctele M, K, L situate pe laturile AB, BC, CA respectiv, și diferite de vârfurile triunghiului. Să se demonstreze că cel puțin una dintre ariile triunghiurilor MAL, KBM, LCK nu depășește un sfert din aria triunghiului ABC.

(***)

# BAREM de CORECTARE

## cls. a X-a

### PROBLEMA I.

- START — — — — — — — — — — — — — — 1p
- Notează $a = \frac{1}{k} \in (0,1)$ și $b = \frac{1}{k+1} \in (0,1)$ — — — — — 1p
- Din $a \neq b$ scrie $m_h < m_g$ — — — — — — — — — 1p
- Logaritmează inegalitatea în bazele $a$ și $b$ — — — 1p
- Însumează inegalitățile — — — — — — 1p
- Folosește $\log_a b + \log_b a > 2$ — — — — — — — — 1p
- Obține $\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{2k+1}$ — — — — — — — — — — 1p
- Înlocuiește și obține $\log_{\frac{1}{k}} \frac{2}{2k+1} + \log_{\frac{1}{k+1}} \frac{2}{2k+1} > 2$ — — 1p
- Însumează după $k$ — — — — — 1p
- Concluzia finală — — — — — — — 1p

Total 10 p

### PROBLEMA II.

- START — — — — — — — — — — — — 1p
- Scrie $\frac{(1+2)!}{1!\,2!} = C_{1+2}^{1}$ ; $\frac{(1+2+3)!}{(1+2)!\,3!} = C_{1+2+3}^{1+2}$ ;

  $\frac{(1+2+3+4)!}{(1+2+3)!\,4!} = C_{1+2+3+4}^{1+2+3}$ — — — — — — — — — — 2,5p
- Observă că $\frac{(1+2+\dots+n)!}{(1+2+\dots+(n-1))!\,n!} = C_{1+2+\dots+n}^{1+2+\dots+(n-1)}$ — — — 2,5p
- Dovedește că formula este generală — — — 1p
- Pentru $k = \overline{2,n}$ înmulțește egalitățile — — — 1p
- Aduce la forma cea mai simplă — — — — — 1p
- Concluzia finală — — — — — — — — 1p

Total 10.

PROBLEMA III.

- START — — — — — — — — — — — 1p
- Notează $s_n = \sin^n x + \cos^n x$ — — — — — — — 1p
- Scrie $s_2 = (\sin x + \cos x)^2 - 2\sin x \cos x = s_1(\sin x + \cos x) -$
$- s_0 \sin x \cos x$

$s_3 = (\sin x + \cos x)^3 - 3(\sin x + \cos x)\sin x \cos x =$

$= s_2(\sin x + \cos x) - s_1 \sin x \cos x$ — — — — — — — — 1p
- Observă $s_n = s_{n-1}(\sin x + \cos x) - s_{n-2}\sin x \cos x$ pentru $n \geq 2$ -- 2p
- Dovedește că relația este generală — — — — — 1p
- Observă că $\sin x + \cos x \in \mathbb{Q}$ și $\sin x \cos x \in \mathbb{Q}$ — — — 1p
- Folosește inducția matematică și obține rezultatul — 3p

Total 10p

PROBLEMA IV

- START — — — — — — — — — — — — — 1p
- Scrie $\frac{S_{MBK}}{S_{ABC}} = \frac{MB \cdot BK}{AB \cdot BC}$ și analoagele — — — — — 2p
- Presupune că $\frac{S_{MBK}}{S_{ABC}} > \frac{1}{4}$ și analoagele — — — — 1p
- Deduce $\frac{BM \cdot AM}{AB^2} \cdot \frac{BK \cdot CK}{BC^2} \cdot \frac{AL \cdot CL}{AC^2} > \frac{1}{64}$ — — — 1,5p.
- Folosește inegalitatea $\sqrt{AM \cdot BM} \leq \frac{AM + BM}{2} = \frac{AB}{2}$, de unde
$\frac{AM \cdot BM}{AB^2} \leq \frac{1}{4}$ și analoagele — — — — — — 2p
- Înmulțește inegalitățile și obține contradicție — — — 1,5p
- Concluzia finală — — — — — — — 1p

Total 10

# CONCURSUL TRAIAN LALESCU
## TIMIȘOARA 1998
## CLASA A XI-A

I. Fie $A, B, C$ unghiurile unui triunghi. Să se calculeze determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & \cos A & \cos B & \cos C \\ \cos A & -1 & \cos C & \cos B \\ \cos B & \cos C & -1 & \cos A \\ \cos C & \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix}$$

și să se arate că $-\frac{27}{16} \le \Delta < 0$. În ce caz are loc egalitatea?

(Luminița și Bogdan Sasu, Timișoara).

II a). Fie șirurile $\{a_n\}_{n\in N}$ și $\{b_n\}_{n\in N}$ astfel că $a_n \geq 0$, $b_n \leq 0$, $n\in N$ și $a_n \to \infty$, $b_n \to b \in R$. Arătați că există un unic șir $\{x_n\}_{n\in N}$, $x_n \geq 0$, care verifică $a_n x_n + b_n = e^{-x_n}$, $n\in N$. Demonstrați că $\{x_n\}$ este convergent și calculați limita sa

(Răzvan Tudoran, Timișoara)

b) Fie $a>0$ și $f:[0,a)\to R$ cu $f(0)=0$, o funcție derivabilă la dreapta în $x=0$. Arătați că șirul $\{y_n\}_{n\geq 1}$ definit prin

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right), \quad n\in N^*$$

este convergent și calculați limita sa

(***)

III a) Să se determine funcțiile $f: R\to R$ cu proprietatea

$$\left|f(x+y) - f(x) - \frac{1}{2}f^2(y)\right| \leq |xy|, \quad \forall\, x, y \in R$$

(Alin Pogan, Timișoara)

b) Fie $f, g: R \to R$ două funcții derivabile pe $R$ astfel încât $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in R$. Punem $Z(f) = \{x\in R : f(x) = 0\}$, $Z(g) = \{x \in R : g(x) = 0\}$. Să se arate că funcția $h: R\to R$ definită prin

$$h(x) = |f(x)|\, g(x) \quad (x\in R)$$

este derivabilă pe $R$, dacă și numai dacă $Z(f) \subset Z(g)$.

(***)

CLS. XI-A
(continuare)

IV. Fie $G_i$, $i=1,2,3,4$, centrele de greutate ale triunghiurilor $ABC_i$, $i=1,2,3,4$ și fie $D$ mijlocul segmentului $[AB]$. Arătați că

a) dacă $C_1C_2C_3C_4$ este un pătrat, atunci și $G_1G_2G_3G_4$ este pătrat.

b) dacă punctele $C_i$, $i=1,2,3,4$ aparțin mediatoarei segmentului $[AB]$ astfel încât:
$DC_1 = AB$, $DC_2 = \frac{7}{6}AB$, $DC_3 = \frac{5}{4}AB$ și $DC_4 = \frac{3}{2}AB$,

atunci
$m(\widehat{AC_1B}) + m(\widehat{AC_2B}) + m(\widehat{AC_3B}) + m(\widehat{AC_4B}) = 180°$.

(Gheorghe Ivan, Timișoara)

# BAREM DE CORECTARE

## Clasa XI-a

**Problema I.**

Start ------------------------------------ 1 p

Indică o metodă de calcul a determinantului --- 1

Aplică efectiv metoda aleasă ---------------- 4

Găsește $\Delta = -4\sin^2 A \sin B \sin^2 C$ --------- 2

Găsește $\Delta < 0$ -------------------------- 0,25

Folosește inegalitatea

$$\sin A \sin B \sin C \leq \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^3$$ --- 1

Folosește inegalitatea (eventual, alta)

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin \frac{A+B+C}{3}$$ --- 0,25

Găsește $\Delta \geq -\frac{27}{16}$ ------------------ 0,25

Găsește $\Delta = -\frac{27}{16}$ dacă $A = B = C$ -------- 0,25

10 p.

# BAREM CORECTARE

## Clasa XI-a

Problema II.

Start - - - - - - - - - - - - - - - - - 1 p

a). Consideră funcțiile $g(x)=e^{-x}$, $g_n(x)=a_n x+b_n$ - - - - - - - - - - 0,5

și observă $g\downarrow$, $g_n\nearrow$ - - - - - - - - - - 0,5

Deduce $\exists!\ x_n \geq 0 : g(x_n)=g_n(x_n)$ - - - - - - - -

Folosește $e^x \geq x+1$ și găsește că

$a_n x_n^2+(a_n+b_n)x_n+b_n-1 \leq 0,\ n\in\mathbb{N}$ - - - - 1

Găsește $\Delta_n>0$ și soluțiile $x_n^1, x_n^2$ ale - - - - - 0,5

ecuației $a_n x^2+(a_n+b_n)x+b_n-1=0$ - - - - - -

Găsește că $0 \leq x_n \leq \max\{x_n^1, x_n^2\}$ - - - - - 1

Observă $\dfrac{b_n}{a_n} \to 0$ ($\{b_n\}$ - mărginit) - - - - 0,5

Deduce $x_n \to 0$ - - - - - - - - - - - - - - 1

b) Scrie derivabilitatea lui $f$ la dreapta în 0:

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \delta<a : x\in(0,\delta) \Rightarrow$

$\left|\dfrac{f(x)}{x}-f_d'(0)\right| < \varepsilon/2$ - - - - - - - - 0,5

Aplică succesiv inegalitatea (demodulată)

pentru $x_{n,k}=\dfrac{k}{n^2}$ $(k=\overline{1,n})$ pentru $\dfrac{1}{n}<\delta$ - - - 1

Însumează inegalitățile obținute - - - - - - - 1

Observă $\sum_1^n \dfrac{k}{n^2}=\dfrac{n+1}{2n} \to \dfrac{1}{2}$ - - - - - - - - - 0,5

Deduce $y_n \to \dfrac{1}{2} f_d'(0)$ - - - - - - - - - - - 1

10 p.

# BAREM DE CORECTARE

## Clasa XI-a

Problema III.

Start ---------------------------- 1 p

a) Găsește $f(0)=0$ ---------------------- 0,5

Găsește $f(\mathbb{R})\subset\{0,2\}$ ------------------ 0,5

Deduce $(x=y)$ inegalitatea

$|f(2x)-f(x)-\frac{1}{2}f^2(x)|\leq x^2,\ x\in\mathbb{R}$ ------- 1

Arată $f(x)=0,\ x\in[-1,1]$ ------------------ 1

Arată că $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$ ------------- 1

Aplică teorema Darboux și deduce că

$f(\mathbb{R})$ - interval în $\mathbb{R}$ ---------------- 0,5

Conclude $f(\mathbb{R})=\{0\}$ ------------------ 0,5

b) Necesitatea. Reduce la absurd și găsește

$x_0\in Z(f)\setminus Z(g)$ ------------------ 0,5

Deduce că $g(x)\neq 0,\ x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ ------- 0,5

Deduce că $\frac{h}{g}$ - derivabilă pe $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ --- 0,5

Deduce $|f|$ derivabilă în $x_0$ și $f'(x_0)=0$ ---- 0,5

Semnalează contradicția -------- 0,5

Suficiența.

Afirmă $|f|$-derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus Z(f)$ și

deduce $h$ - derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus Z(f)$ ------- 0,5

Arată (cu definiția) că $h$ - derivabilă --- 1

pe $Z(f)$

10 p.

# BAREM DE CORECTARE

## clasa XI-a

Problema IV.

Start - - - - - - - - - - - - - - - - - - - 1 p

a) Alege reperul și stabilește $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$,
$C_1(a,0)$, $C_2(0,a)$, $C_3(-a,0)$, $C_4(0,-a)$ cu $a>0$ - - - - - - 1p

Găsești $G_1\left(\frac{x_A+x_B+a}{3}, \frac{y_A+y_B}{3}\right)$, $G_2\left(\frac{x_A+x_B}{3}, \frac{y_A+y_B+a}{3}\right)$,
$G_3\left(\frac{x_A+x_B-a}{3}, \frac{y_A+y_B}{3}\right)$, $G_4\left(\frac{x_A+x_B}{3}, \frac{y_A+y_B-a}{3}\right)$ - - - - 1p

Arată că $m_{G_1G_2} = m_{G_3G_4} = -1$, $m_{G_2G_3} = m_{G_4G_1} = 1$ și
deduce că $G_1G_2G_3G_4$ - paralelogram - - - - - - - - - 2p

Din $m_{G_1G_2} \cdot m_{G_2G_3} = -1 \Rightarrow G_1G_2 \perp G_2G_3 \Rightarrow$
$\Rightarrow G_1G_2G_3G_4$ - dreptunghi - - - - - - - - - - 1p

Din $G_1G_2 = G_2G_3 = \frac{2a}{3} \Rightarrow G_1G_2G_3G_4$ - pătrat - - - - 1p

b) Observă că relația cerută este echivalentă cu
$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 90^\circ$, $\alpha_i = m(\widehat{AC_iD})$, $i=1,2,3,4$ - - - - - 1p

Deduce $tg\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $tg\alpha_2 = \frac{3}{7}$, $tg\alpha_3 = \frac{2}{5}$, $tg\alpha_4 = \frac{1}{3}$ - - - 1p

$tg(\alpha_1+\alpha_4) = 1 \Rightarrow \alpha_1+\alpha_4 = 45^\circ$

$tg(\alpha_2+\alpha_3) = 1 \Rightarrow \alpha_2+\alpha_3 = 45^\circ$

și deduce $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 90^\circ$ - - - - - - - - - 1p

10 p.

# CONCURSUL TRAIAN LALESCU
## TIMIȘOARA 1998
## CLASA A XII-A

I. Fie $G=\{f\in C_{[0,1]} : \int_0^1 f(x)dx=1\}$.

Să se calculeze

$$\min_{f\in G}\int_0^1 (1+x^2)f^2(x)\,dx.$$

* * *

II. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x\ln x}{e^x+x^x}$.

a) Să se calculeze primitiva funcției $f$, notată $F$, care verifică condiția $F(1)=0$

b) Să se studieze existența

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x).$$

A. Pogan (Timișoara)

III. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel cu proprietatea $x^{12}=x$, $(\forall)x\in A$. Atunci $x^2=x$, $(\forall)x\in A$.

* * *

IV. Fie $(M,\cdot)$ un monoid finit. Să se arate că $a\in M$ este inversabil, dacă și numai dacă

$$ax=ay \Rightarrow x=y.$$

* * *

TIMP DE LUCRU 3 ORE.

# BAREM TRAIAN LALESCU

TIMIȘOARA 1998
CLASA A XII A.

I.

1. Stabilește sau folosește formula
$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \int_a^b f^2 \cdot \int_a^b g^2 \ldots\ldots 1p.$$

2. Aplică formula și obține
$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \cdot \int_0^1 (1+x^2) f^2(x)\,dx$$
$$\ldots 3p.$$

3. Obține:
$$\frac{4}{\pi} \leq \int_0^1 (1+x^2) f^2(x)\,dx \ldots 1p.$$

4. Determină funcția $f(x)$ pentru care
$$\int_0^1 (1+x^2) f^2(x)\,dx = \frac{4}{4\pi} \ldots 4p.$$

5. Start ........ 1p.

# BAREM TRAIAN LALESCU
# TIMIȘOARA 1998
# CLASA A XII A.

1. Scrie $x^x = e^{x \ln x}$ . . . . 1p
2. $\int \frac{e^x \ln x}{e^x + e^{x \ln x}} dx = \int \frac{\ln x}{1 + e^{x \ln x - x}} dx$ . . 2p
3. Calculează $(x \ln x - x)' = \ln x$ . . . . p
4. Obține $\int \frac{dt}{1+e^t}$ . . . . . . . . 1p
5. Determină $F(x)$ . . . . . 2p
6. Calculează limita: $\lim_{x\to 0} F(x) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ . . . 2p
7. Start . . . . . 1p

BAREM TRAIAN LALESCU
TIMIȘOARA 1998
CLASA A XII-A.

III. 1. $x^{12}=x$ și $(-x)^{12}=-x \Rightarrow x+x=0$ ... 1p.

2. $(x+\hat{1})^{12}=x+\hat{1} \Longrightarrow x^8+x^4=0$ ... 2p.

3. Obține $x=x^8=x^4$ ... 2p.

4. Obține $x^5=x \Rightarrow$ ... 2p.

5. Obține $x^2=x$ ... 2p.

6. START ... 1p.

BAREM TRAIAN LALESCU
TIMIȘOARA 1998
CLASA A XII A.

IV.

1. Consideră $f: M \to M$ $f(x) = ax$ . . . . 1

2. Injectivitatea lui $f$ . . . . 1

3. Observă $f$ bijectivă . . . 1.

4. Arată că $a$ este inversabil la dreapta . . . . 1p

5. Consideră $g: M \to M$ $g(x) = xa$ . . . . . 2p

6. Observă $g$ injectivă . . . . 1p

7. Obține $a$ inversabil . . . 1p

8. $a$ inversabil implică $ax = ay \Rightarrow x = y$ . . . . 1p.

9. Start . . . . 1p.