Concursul Interjudeţean "TRAIAN LALESCU", ediţia a X-a, Petroşani, martie 1996

După fiecare problemă este prezentat un cod de tipul (26; 14; 7; 5) care semnifică

Nr. participanţi:	26
Nr.notelor între 9 şi 10:	14
Nr. notelor între 6 şi 8:	7
Nr. notelor sub 5:	5

CLASA a V - a

O.29. Să se determine două numere naturale a şi b astfel încât : c.m.m.d.c. $(a,b) = 12$ şi c.m.m.m.c. $(a,b) = 216$. Câte soluţii are problema ?
(22; 15; 7; 0)

* * *

O.30. Să se afle ultimele două cifre ale numerelor : $N_1 = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{1996}$ şi $N_2 = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{1997}$.
(22; 7; 5; 10)

R.M.T, nr. 1-1996

O.31. Într-un oraş sunt 5 librării A, B, C, D, E. În fiecare lună un elev vizitează trei dintre acestea. Se ştie că:
- dacă elevul a vizitat librăria B atunci el a vizitat în aceeaşi lună şi librăria A.
- dacă într-o lună a vizitat librăria C, în luna următoare el nu a mai vizitat-o.
- în fiecare lună elevul a vizitat o singură librărie din cele vizitate în luna precedentă.
- în prima lună a vizitat librăriile A, B, C.

Să se afle:

a) librăriile vizitate în luna a doua.

b) librăriile vizitate în luna a treia.

Justificaţi răspunsurile.
(22; 15; 2; 5)

* * *

CLASA a VI - a

O.32. Se ştie că 2^n are 30 de cifre. Să se arate că există o cifră care se repetă cel puţin de 4 ori.

* * *

(26; 4; 5; 17)

O.33. În plan se consideră patru puncte, oricare trei necoliniare. Fiecare din cele şase segmente cu capetele în două dintre aceste puncte se colorează cu roşu sau cu albastru.

a) Să se arate că dacă există un punct cu proprietatea că segmentele care pleacă din el sunt la fel colorate atunci există un triunghi cu laturile la fel colorate.

b) Formulaţi reciproca afirmaţiei de la a) şi arătaţi că ea este adevărată.

Dorel Miheţ

(26; 5; 2; 19)

O.34. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$). Perpendiculara din mijlocul M al laturii AB pe AB intersectează perpendiculara din mijlocul N al lui AC pe AC în O.

a) Arătaţi că triunghiul BOC este isoscel.

b) Arătaţi că $AO \perp BC$.

c) Dacă $O \in (BC)$, arătaţi că triunghiul MON este dreptunghic şi că $m(\hat{A}) = 2m(\hat{B})$.

Maria Miheţ

(26; 6; 13; 7)

O.35. Fie $a, b, c \in \mathbf{Z}^*$ astfel încât

$$\frac{a+b-2c}{c} = \frac{a-2b+c}{b} = \frac{-2a+b+c}{a}.$$

Să se determine valoarea raportului $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.

Maria Miheţ (R.M.T. nr.1 - 1996)

(26; 2; 12 ; 12)

CLASA a VII - a

O.36. Determinaţi mulţimea

$$A = \{(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} | a^2 b + ab - a^2 - a - 3b = 2\}$$

Nicolae Surulescu

(29; 18; 5; 6)

O.37. Considerăm o mulțime X cu 5 elemente, numere naturale. Să se arate că există o submulțime a lui X care are proprietatea că suma elementelor sale se divide cu 5.
(29: 0: 3: 26) * * *

O.38. Fie ABC un triunghi oarecare, D un punct pe AB și C' un punct pe BC astfel încât B este între A și D iar C este între B și C'. Prin D ducem o paralelă la BC care taie AC în E și AC' în F. Dacă O este intersecția dintre DC' și BF, iar P intersecția lui AO cu DE arătați că

$$2DP \cdot BC = BC' \cdot DE.$$

(29: 15: 4: 10) *Nicolae Surulescu*

O.39. Fie O un punct în interiorul triunghiului ABC și A', B', C' centrele de greutate ale triunghiurilor OBC, OAC și respectiv OAB. Să se arate că AA', BB', CC' sunt concurente.
(29: 3: 5: 21) *Dorel Barbu*

CLASA a VIII - a

O.40. Fie $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$.

$$f(n) = (-1)^1|(-1)^n n - 1996| + (-1)^2|(-1)^{n+1}(n+1) - 1996| +$$

$$(-1)^3|(-1)^{n+2}(n+2) - 1996| + (-1)^4|(-1)^{n+3}(n+3) - 1996|$$

Să se detrmine $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $f(n) = 6$.
(24: 10: 8: 6) *Dan Comanșcu*

O.41. Să se determine soluțiile naturale ale sistemului

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 50 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 180. \end{cases}$$

(24: 2: 2: 20) *Dan Comanescu*

O.42. Fie P un polinom cu coeficienți reali, de grad impar (≥ 3).

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_{2n+1}X^{2n+1}$$

astfel încât $a_0 \ge a_1 \ge \dots \ge a_{2n+1}$.
Dacă $(x+1)^2$ divide P, demonstrați că P este divizibil cu $x - 1$.
(24; 3; 0; 21) *Dan Comănescu*

O.43. Fie două plane π_1, π_2 paralele și distincte. În planul π_1 considerăm un cerc de rază R ($R > 0$). Să se găsească locul geometric al punctelor M din planul π_2 pentru care există un punct N pe cerc astfel încât distanța dintre M și N este egală cu numărul dat a ($a > 0$).
(24; 0; 0; 24) *Dan Comănescu*

O.44. Fie triunghiul OAB dreptunghic în O. Pe perpendiculara în O pe planul (OAB) se ia un punct C. Arătați că

$$\frac{EF^2}{CD^2} = \frac{AB^2(BC^2 + AC^2 - AB^2)}{2BC^2 \cdot AC^2}$$

unde E și F sunt proiecțiile pe laturile AC respectiv BC ale unui punct arbitrar D al segmentului (OC).
(24; 3; 7; 14) *Gheorghe Ioan*

CLASA a IX - a

O.45. Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC și MD, ME, MF bisectoarele unghiurilor BMC, CMA respectiv AMB ($D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$). Să se arate că AD, BE, CF sunt concurente.
(23; 21; 0; 2) * * *

O.46. Să se arate că dacă $a, b \in [1, \infty)$, atunci ecuația

$$abx^4 + (a^2 + b^2)x^3 + (a + ab + b)x^2 + (a + b)x + 1 = 0.$$

are cel puțin o soluție reală. (23; 1; 0; 22) *N. Sarulescu*, Timișoara

O.47. Să se găsească numerele reale x_1, x_2, x_3 care verifică

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = x_3 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = x_1 \end{cases}$$

unde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ și $(b - 1)^2 < 4ac$.
(23; 5; 0; 18) *Dorel Barbu*

O.48. Fie ABC un triunghi și d o dreaptă, care trece prin centrul de greutate al acestuia și care intersectează laturile AB și AC în M respectiv N. Să se arate că

$$4 \cdot MB \cdot NC \leq AM \cdot AN.$$

Când are loc egalitatea ?

(23; 2; 3; 18) *Mihai Chiş*

CLASA a X - a

O.49. Să se determine soluțiile reale ale sistemului

$$\begin{cases} x_1 = x_2^2 - x_4^2 \\ x_2 = x_1^2 - x_3^2 \\ x_3 = 2x_2 \cdot x_1 \\ x_4 = 2x_1 \cdot x_3. \end{cases}$$

(25; 6; 5; 14) *Dan Comănescu*

O.50. Să se determine numerele naturale x și y astfel încât :

$$\log_3(x+1) + \log_{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+9} - \log_3(x+121) = y.$$

(25; 6; 13; 6) *Gheorghe Ivan*

O.51. Să se determine funcțiile injective $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ cu proprietatea

$$(f \circ f)(x) - f(x) - 1 = 0.$$

(25; 0; 2; 23) *Dan Comănescu*

O.52. Fie ABC un triunghi, D piciorul bisectoarei din A ($D \in (BC)$). Prin A se duce o dreaptă δ ce face un unghi de 45^0 cu dreapta AD. Dacă lungimea perpendicularei comune dintre dreptele δ și BC este mai mare sau egală cu $\frac{\sqrt{2}}{2}BC$ atunci să se demonstreze că $A \leq \arccos\frac{1}{3}$.

(25; 0; 0; 25) *Dan Comănescu*

O.53. Fie triunghiul OAB dreptunghic în O. Pe perpendiculara în O pe planul (OAB) se ia un punct C. Arătați că :

1°. $\sigma^2(OAB) = \sigma(ABC)\cdot\sigma(HAB)$
unde H este proiecția punctului O pe planul (ABC).

2°. $\frac{1}{\sigma(HAB)} + \frac{1}{\sigma(HBC)} + \frac{1}{\sigma(HAC)} = \frac{2}{\sigma(ABC)}$.

(25; 13; 9; 3)

CLASA a XI - a

O.54. Se consideră șirul $(x_n)_{n\ge 0}$ definit prin $x_0 = a \in \mathbf{R}$,

$$x_{n+1} = \frac{\omega}{4} + x_n^2,\quad (\forall)\, n \ge 0,$$

unde $\omega \in [0,1]$ este fixat. Să se determine mulțimile.

a) $C = \{a \in \mathbf{R} \mid (x_n)$ este convergent $\}$

b) $L = \{a \in \mathbf{R} \mid (x_n)$ are limită $\}$

c) $M = \{a \in \mathbf{R} \mid (x_n)$ este monoton $\}$

d) $S = \{a \in \mathbf{R} \mid (\exists)\, m \in \mathbf{N}$ astfel încât $x_n = x_{n+1}\ (\forall)\, n \ge m\}$.

(19; 2; 6; 11) *Viorel Radu*

O.55. Fie $f : \mathcal{M}_2(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ o funcție cu proprietatea că

$$f(A\cdot B) = f(A)\cdot f(B),\quad (\forall)\, A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}).$$

Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente :

a) $f(A) = \det A,\quad (\forall) A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$

b) $f(A + I_2) = f(A) + f(I_2) + Tr(A),\quad (\forall)\, A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

(19; 0; 8; 11) *Viorel Radu*

O.56. Fie

$\mathcal{M}_1 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid \det(A^2 - 2I_2) = 0\}$

$\mathcal{M}_2 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Q}) \mid \det(A^2 - 2I_2) = 0\}$.

Determinați

$D_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid (\exists)\, A \in \mathcal{M}_1 : \det A = x\}$

$D_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid (\exists)\, A \in \mathcal{M}_2 : \det A = x\}$.

(19; 3; 3; 13) *Dorel Mihaț*

O.57. Fie $A \subset \mathbf{R}$ și $f, g : A \to A$ două funcții continue astfel încât $f \circ g$ este bijecție.

a) Arătați că dacă $A = \mathbf{R}$ atunci f și g sunt bijecții.

b) Rămane proprietatea de la a) adevărată dacă $A = (0, \infty)$?
(19: 1: 3: 15) *Dorel Miheţ, Mihai Piticari* (R.M.T. nr.1/1996)

CLASA a XII - a

O.58. a) Fie $f_1, f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcţii astfel încat f_1 admite primitive iar f_2 este derivabilă cu derivata continua. Să se arate că $f_1 f_2$ admite primitive.

b) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încat $g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x)(x^2 + 1)\cos x$ şi $h(x) = f(x)\sin x$ admit primitive. Demonstraţi că f admite primitive.
(19: 3: 6: 10) *Ioan Caşu, Emilian Parau*

O.59. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continuă şi injectivă iar F o primitivă a sa. Să se studieze monotonia lui F.
(19: 6: 5: 8) *Silviu Biraus*

O.60. Fie $(G, \cdot)$ grup şi H un subgrup al său.
a) Cercetaţi dacă există o aplicaţie $f : H \to G - H$ astfel încat

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad (\forall)x, y \in H.$$

b) Arătaţi că dacă G este infinită şi $H \neq G$ atunci $G - H$ este infinită.
(19: 2: 5: 12) *Dorel Miheţ* (prelucrare)

O.61. Fie x un element al unui inel cu proprietatea că exista $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încat $x^n = 0$. Arătaţi ca:

a) $1 - x^2$ este inversabil.

b) $(1 - x^p)^q(1 + x^r)^s$ este inversabil pentru orice $p, q, r, s \in \mathbf{N}^*$.
(19: 7: 1: 8) *Sorin Noaghi*