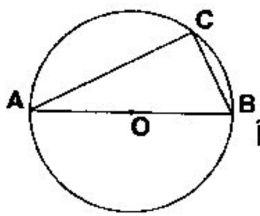
EDIȚIA a IX-a, REȘIȚA - 1995

CLASA a V-a

1. Să se arate că numărul $1+3+3^2+...+3^{1995}$ se divide cu 10.
2. Să se determine numerele naturale p astfel încât p, p^2+2 și p^2+4 să fie simultan prime.
3. Să se determine numerele naturale n, cu cifrele numere prime distincte, având proprietatea că n se divide cu produsul cifrelor sale.

CLASA a VI-a

1. Să se determine x,y,z știind că sunt invers proporționale cu 2, 3 și 4 și $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{400}$.
2. Să se determine $n\in\mathbf{N}$ pentru care avem $\frac{3n+4}{n^2+1}\in\mathbf{N}$.
3. 

În figura de mai jos ABC este un triunghi în care [AB] este diametru iar C aparține cercului. Demonstrați că măsura unghiului BCA este de 90°.
4. Să se găsească numerele naturale u și v astfel încât să avem $u\cdot v=3u+5v$.

CLASA a VII-a

1. Să se calculeze sumele:

a) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{1994}+\sqrt{1995}}$

b) $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{1995\sqrt{1994}+1994\sqrt{1995}}$

2. Fie $N=\overline{a_0a_1a_2a_3a_4a_5}$ un număr de 6 cifre cu proprietatea: a_0 este numărul de cifre 0 ale lui N, a_1 este numărul de cifre 1 ale lui N, ..., a_5 este numărul de cifre 5 ale lui N. Arătați că N se divide cu 300.
3. Fie D piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC și M mijlocul lui [BC]. Pe prelungirea laturii [AB], dincolo de B, se consideră punctul E astfel încât BE=BD. Știind că punctele E,D,M sunt coliniare, arătați că:
a) $\Delta ABC\sim\Delta AME$
b) AE=DC.
4. Fie ABCD un dreptunghi, E proiecția lui B pe AC, P mijlocul lui [AE] și Q mijlocul lui [CD]. Arătați că $BP\perp PQ$.

CLASA a VIII-a

1. Să se determine $a,b\in\mathbf{N}^*$ astfel încât numărul $a^3-b^3+a^2+ab+b^2$ să fie prim. Există a, b $\in\mathbf{N}^*$ astfel încât numărul $a^3+b^3+a^2-ab+b^2$ să fie prim?

***

2. Fie a, b, c $\in\mathbf{R}$ și

$$E_1=\left(a^2+b^2-c^2\right)^2-4a^2b^2,$$

$$E_2=\left(b^2+c^2-a^2\right)^2-4b^2c^2,$$

$$E_3=\left(c^2+a^2-b^2\right)^2-4c^2a^2$$

Să se arate că $E_1=E_2=E_3$. Dacă a,b,c sunt laturile unui triunghi, să se arate că $E_1<0$ și că aria triunghiului este egală cu $\frac{1}{4}\sqrt{-E_1}$.

3. Fie ABCDA'B'C'D' un paralelipiped dreptunghic cu baza un pătrat şi AB=a, AA'=b
a) Să se exprime în funcţie de a înălţimea paralelipipedului ştiind că măsura unghiului dintre MD şi NC' este de 60^0, unde M şi N sunt mijloacele muchiilor laterale [AA'] şi [DD'].
b) Arătaţi că aria pătratului cu latura egală cu [BD'] este mai mare sau egală cu jumătate din aria totală A_t a paralelipipedului.
c) Demonstraţi că dacă între aria totală A_t, volumul V şi suma S a lungimilor tuturor muchiilor are loc relaţia $A_t \cdot S = 72V$, atunci paralelipipedul este un cub.

Gh. Ivan

4. Fie ABCD un pătrat şi E un punct nesituat în planul pătratului. Să se arate că există un punct în spaţiu egal depărtat de punctele A,B,C,D,E.

M. Chis

SOLUȚII

EDIȚIA a IX-a 1995 REȘIȚA

CLASA a V-a

1. Notăm cu u(n) ultima cifră a numărului natural n; avem:

$u(3^0)=1; u(3^2)=9; u(3^3)=7; u(3^4)=1; u(3^5)=3$,...

Constatăm că cifrele lui $3^n, n\geq 0$ se repetă din 4 în 4 și patru puteri consecutive ale lui 3 au ultima cifră 1,3,9,7 deci suma a patru puteri consecutive este cu ultima cifră 0 și se divide cu 10. Atunci scriem:

$S=(1+3+3^2+3^3)+(3^4+3^5+3^6+3^7)+\dots+(3^{1992}+3^{1993}+3^{1994}+3^{1995})$

deci S este o sumă de numere divizibile cu 10 și se divide cu 10.

2. Pentru p=2 avem $p^2+2=4+2=6$ care nu este număr prim.

Pentru p=3 avem $p^2+2=9+2=11$ și $p^2+4=9+4=13$ care nu convine problemei.
Dacă p=3k+1 atunci:

$p^2+2=(3k+1)^2+2=9k^2+6k+1+2=3(3k^2+2k+1)$ și nu este număr prim pentru $k\geq 1, k\in \mathbf{N}$.
Dacă p=3k+2, atunci:

$p^2+2=9k^2+12k+4+2=3(3k^2+4k+2)$ și nu este număr prim pentru $k\geq 1, k\in \mathbf{N}$.
Deci nu există număr natural mai mare decât 3 pentru care numerele p, p^2+2 și p^2+4 să fie simultan prime.
Soluția este p=3.

3. Cifrele numărului natural n fiind numere prime pot fi 2,3,5,7 și n nu poate avea mai mult de patru cifre.
Dacă n are o singură cifră, atunci $n\in\{2,3,5,7\}$.

Dacă n are două cifre atunci:

$n \in \{23,32,25,52,27,72,35,53,37,73,57,75\}$ și nici unul nu verifică proprietatea cerută.

Dacă n are trei cifre, atunci:

$n \in \{235;253;237;273;257;275;357;375;325;352;523;532$
$327;372;723;732;527;572;725;752;537;573;735;753\}$.

Dintre acestea numai n=735 se divide cu 7·3·5=105.

Dacă n are patru cifre atunci:

$n \in \{2357;2375;2537;2573;3257;3275;3527;3572;2735;2753;$
$3725;3752;5237;5273;5327;5372;5723;5732;7235;7253;7325;$
$7352;7523;7532\}$ și nici unul nu verifică proprietatea cerută.

Deci soluțiile problemei sunt numerele: 2,3,5,7,735.

CLASA a VI-a

1. Din faptul că x,y,z sunt invers proporționale cu 2,3 și 4 obținem:

$$\frac{2}{\frac{1}{x}}=\frac{3}{\frac{1}{y}}=\frac{4}{\frac{1}{z}}=\frac{2+3+4}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{9}{\frac{3}{400}}=1200$$

De aici rezultă că 2x=1200; 3y=1200; y=400 și 4z=1200; z=300. Deci numerele sunt x=600; y=400 și z=300.

2. Din fracția dată obținem:

$$\frac{3n+4}{n^2+1}=\frac{3(n+1)+1}{n^2+1}\le\frac{3(n^2+1)+1}{n^2+1}=3+\frac{1}{n^2+1}<4$$

de unde $\frac{3n+4}{n^2+1}\in\{1,2,3\}$.

Dacă $\frac{3n+4}{n^2+1}=1\Rightarrow n^2+1=3n+4\Rightarrow n^2-3n-3=0$ care n-are soluții în **N**. (Nu există n∈**N** pentru care n(n-3)=3.)

Dacă $\frac{3n+4}{n^2+1}=2\Rightarrow 2n^2+2=3n+4\Rightarrow 2n^2-3n-2=0$ cu soluția n=2

Dacă $\frac{3n+4}{n^2+1}=3\Rightarrow 3n^2+3=3n+4\Rightarrow 3n^2-3n=1$ care n-are soluții în **N**. (Nu există n∈**N** pentru care 3n(n-1)=1).

Deci doar pentru n=2 avem $\frac{3n+4}{n^2+1}\in \mathbf{N}$.

3. Triunghiurile AOC și BOC sunt isoscele, de unde rezultă că m(∢ABC)=m(∢BCO) și m(∢BAC)=m(∢OCA). Ținând cont de faptul că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180⁰, avem:
   m(∢ABC)+m(∢BAC)+m(∢ACB)=180⁰ sau
   m(∢ABC)+m(∢BAC)+m(∢OCA)+m(∢OCB)=2m(∢OCA)+ +2m(∢OCB)=2m(∢ACB)=180⁰ de unde m(∢ACB)=90⁰.
4. Egalitatea dată se mai poate scrie:
   uv-3u=5v
   $\Rightarrow u(v-3)=5(v-3)+15\Rightarrow(u-5)(v-3)=15$ cu u,v∈**N**
   Atunci avem:
   $$\begin{cases}u-5=3\\v-3=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=8\\v=8\end{cases}\text{sau}\begin{cases}u-5=15\\v-3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=6\\v=18\end{cases}\text{ sau:}$$
   $$\begin{cases}u-5=5\\v-3=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=10\\v=6\end{cases}\text{sau}\begin{cases}u-5=15\\v-3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=20\\v=4\end{cases}$$
   Alte posibilități nu mai există deoarece divizorii naturali ai lui 15 sunt 1,3,5,15.

CLASA a VII-a

1.a) Un termen oarecare al sumei este de forma:

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$ și avem

$$\frac{1}{\sqrt1+\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2+\sqrt3}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1994}+\sqrt{1995}}=$$
$$=\sqrt2-1+\sqrt3-\sqrt2+\dots+\sqrt{1995}-\sqrt{1994}=\sqrt{1995}-1$$

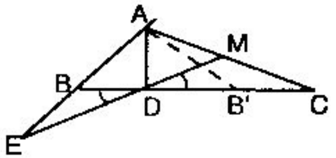
b) Un termen oarecare al sumei este de forma:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

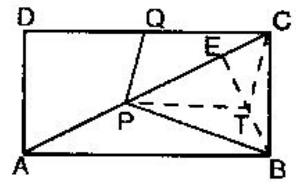
$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{1995\sqrt{1994}+1994\sqrt{1995}}=$$

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1994}}-\frac{1}{\sqrt{1995}}=1-\frac{1}{\sqrt{1995}}$$

2. Numărul având 6 cifre avem $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=6$. Dacă $a_5\neq0$ atunci numărul N are cel puţin o cifră 5 în componenţa sa. Dacă $a_5=1$, cum $a_0\neq0$, rezultă că altă cifră are valoarea 5. Dacă $a_0=5$ ar trebui 5 zerouri în compunerea lui N, imposibil. Şi pentru a_1,a_2,a_3,a_4 valoarea 5 ne conduce la o imposibilitate. Deci $a_5=0$.
Cum cifrele numărului verifică şi egalitatea:
$a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5=6$ şi $a_5=0$, rezultă că:
$a_1+2a_2+3a_3+4a_4=6$.
Dacă $a_4\neq0$ este imposibilă una din valorile 2,3,4 pentru a_4. Dacă $a_4=1$, atunci una din cifrele a_1,a_2,a_3 trebuie să aibă valoarea 4 şi devine imposibilă egalitatea
$a_1+2a_2+3a_3+4a_4=6$. Deci şi $a_4=0$. Rămân egalităţile:
$a_0+a_1+a_2+a_3=6$ şi:
$a_1+2a_2+3a_3=6$ cu $a_0\neq0$.
Cum $a_4=0$ şi $a_5=0$ rezultă că $a_0\geq2$.
Dar suma cifrelor numărului N este 6, adică $3|N$ şi cum:
$a_4=0, a_5=0$ rezultă că $300|N$.
<u>Observaţie.</u>Concret un astfel de număr nu există. Dacă $a_0=2$ atunci: $a_2=1$ şi $a_1\geq1$, contradicţie. Dacă $a_2\neq1$ atunci numărul ar avea mai multe cifre de 2 şi iar se obţine contradicţie. Dacă $a_0=3$, atunci $a_3=1$ şi $a_4=1$, din nou contradicţie. Dacă $a_0=4$, atunci N trebuie să conţină cifra 4 şi obţinem contradicţie cu $a+a_1+2a_2+3a_3=6$.

3. 

Din enunţ avem AD⊥BC, AM=MC, M∈(AC) şi BD=BE.
a) ΔADC este dreptunghic (m(∢D)=90°) şi [DM] mediană. Rezultă că DM=MC, adică ΔDMC este isoscel cu ∢C≡∢MDC. Dar ∢MDC≡∢BDE ca opuse la vârf şi ΔBDE fiind isoscel din construcţie avem m(∢BDE)=m(∢DEB)=m(∢C). Cum ∢ABC este exterior ΔBDE avem m(∢B)=2m(∢C). În ΔABC şi ΔAME avem unghiul A comun şi ∢C≡∢E, de unde rezultă că ΔABC~ΔAME.
b) Construim simetricul lui B faţă de D. Fie B' simetricul lui B faţă de D. Fie B' simetricul, cu BD=DB'.
În ΔABB' avem AD înălţime şi mediană, deci ΔABB' este isoscel cu AB=AB' şi ∢ABB'≡∢AB'B. Cum m(∢B)=2m(∢C) rezultă că m(∢AB'B)=2m(∢C). Dar unghiul AB'B este exterior ΔAB'C şi rezultă că 2m(∢C)=m(∢C)+m(∢B'AC), adică m(∢B'AC)=m(∢C) şi AB'=B'C=AB, de unde AE=DC ca sumă de segmente cu lungimile egale.

4. 

Din ipoteză avem:
BE⊥AC, AP=PC şi DQ=QC. Fie T mijlocul segmentului [EB]. Atunci în ΔEAB segmentul PT este linie mijlocie şi PT II AB,
PT $=\frac{1}{2}$AB. Cum Q este mijlocul lui DC avem QC=$\frac{1}{2}$DC, adică
QC=$\frac{1}{2}$AB. Rezultă că avem PT=QC şi PT II QC II AB şi patrulaterul QPTC este paralelogram. Dar QC⊥CB şi PT II QC de unde PT⊥BC şi în ΔCBP punctul T este ortocentru, de

unde avem CT⊥PB. Din paralelogramul QPTC rezultă că CT ∥ PQ şi cum CT⊥PB avem PQ⊥PB c.c.t.d.

CLASA a VIII-a

1. Fie $N_1=a^3-b^3+a^2+ab+b^2=(a^2+ab+b^2)(a-b+1)$

Pentru $a,b\in \mathbf{N}^*$ rezultă că $a^2+ab+b^2\neq 1$. Din faptul că N_1 este prim avem a-b+1=1, adică a=b. Atunci $N_1=3a^2$ deci $N_1=3$ pentru a fi număr prim, iar din $3a^2=3$ rezultă a=1. Deci pentru a=b=1 avem $a^3-b^3+a^2+ab+b^2$ este număr prim. Fie $N_2=a^3+b^3+a^2-ab+b^2=(a^2-ab+b^2)(a+b+1)$. Pentru ca N_2 să fie număr prim trebuie ca să avem $a^2-ab+b^2=1$ sau a+b+1=1. Dacă a+b+1=1 rezultă a+b=0, cu $a\in \mathbf{N}^*$, $b\in \mathbf{N}^*$, imposibil.

Dacă a-ab+b=1, $a\in \mathbf{N}^*$, $b\in \mathbf{N}^*$ rezultă a=b=1. În acest caz $N_2=3$, care este număr prim.

2. $E_1=(a^2+b^2-c^2)-4a^2b^2=(a^2+b^2-c^2-2ab)(a^2+b^2-c^2+2ab)=$

$=\left[(a-b)^2-c^2\right]\left[(a+b)^2-c^2\right]=$

$=(a-b-c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)=$

$=-(a+b+c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b-c)=$

$E_2=(b^2+c^2-a^2)-4b^2c^2=(b^2+c^2-a^2-2bc)(b^2+c^2-a^2+2bc)=$

$=\left[(b-c)^2-a^2\right]\left[(b+c)^2-a^2\right]=(b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(b+c+a)$

$=-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$

$E_3=(c^2+a^2-b^2)^2-4c^2a^2=(c^2+a^2-b^2-2ca)(c^2+a^2-b^2+2ca)=$

$=\left[(a-c)^2-b^2\right]\left[(a+b)^2-b^2\right]=(a-c-b)(a-c+b)(a+c-b)(a+c+b)=$

$=-(a+c+b)(-a+c+b)(a-b+c)(a+b-c)$

Deci, avem $E_1=E_2=E_3$. Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci avem: a<b+c; b<a+c şi c<a+b, adică -a+b+c>0; a-b+c>0 şi a+b-c>0 de unde rezultă că $E=-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)<0$.

Din formula lui Heron pentru arie avem:

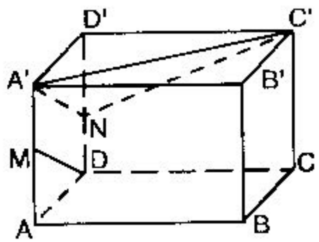
$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde $p=\frac{a+b+c}{2}$.

Atunci: $p(p-b)(p-a)(p-c)=$

$=\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)=$

$=\frac{1}{4}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=-\frac{1}{4^2}E_1$

de unde $S=+\frac{1}{4}\sqrt{-E_1}$ c.c.t.d.



3. a) Din faptul că M este mijlocul muchiei [AA'] avem MA=MA', iar din N mijlocul muchiei DD' avem ND=ND'. În paralelipiped AA' ∥ DD' şi AA'=DD' de unde rezultă că patrulaterul MDNA' este un paralelogram şi MD ∥ A'N. Atunci unghiul dreptelor MD şi NC' are măsura egală cu m(∢A'NC')=60°.

ΔD'NA'≡ΔD'NC', deoarece sunt dreptunghice şi au catetele congruente, de unde rezultă că A'N≡C'N şi ΔA'NC' este isoscel cu măsura unghiului de la vârf de 60°, adică ΔA'NC' este echilateral şi $A'C'=a\sqrt{2}$ ca diagonală a pătratului de bază. Atunci $A'N=a\sqrt{2}$ şi din ΔD'NA' dreptunghic cu A'D'=a,

$A'N=a\sqrt{2}$ și $D'N=\frac{b}{2}$ avem

$\left(a\sqrt{2}\right)^2=a^2+\frac{b^2}{4}$, adică $\frac{b^2}{4}=a^2$ și $b=2a$.

b) BD' fiind diagonala paralelipipedului dreptunghic ABCDA'B'C'D' verifică relația $BD'^2=2a^2+b^2$.

Aria totală a paralelipipedului este $A_t=2a^2+4ab$.

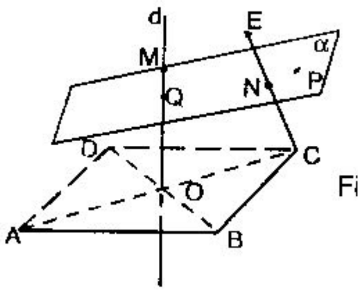
Atunci $BD'^2=a^2+\left(a^2+b^2\right)\geq a^2+2ab=\frac{1}{2}\left(2a^2+4ab\right)=\frac{1}{2}A_t$.

Deci $BD'^2\geq\frac{1}{2}A_t$ c.c.t.d.

c) Din egalitatea $A_t\cdot S=\left(2a^2+4ab\right)\left(8a+4b\right)=72a^2b$ avem

$8a(2a+b)(a+2b)=72a^2b$, adică $(2a+b)(a+2b)=9ab$, de unde rezultă a=b și paralelipipedul este un cub.

4.



Fie $\{O\}=AC\cap BD$ și $d\perp(ABCD)$ cu $O\in d$. Atunci orice punct $M\in d$ este la egală depărtare de punctele A,B,C,D deoarece $\Delta MOA\equiv\Delta MOB\equiv\Delta MOC\equiv\Delta MOD$, având catetele congruente.

Fie N mijlocul lui CE și $\alpha\perp CE$, cu $N\in\alpha$. Atunci orice punct P al planului α este egal depărtat de E și C, deoarece $\Delta PNC\equiv\Delta PNE$, ca dreptunghice cu catetele congruente.

Fie $\{Q\}=\alpha\cap d$, deoarece $\alpha\not\parallel d$, căci în caz contrar $E\in(ABCD)$, imposibil. Atunci din faptul că $Q\in d$ avem QA=QB=QC=QD, iar din faptul că $Q\in\alpha$ avem QC=QE. Deci QA=QB=QC=QD= =QE și punctul Q are proprietatea cerută.

EDIȚIA a IX-a, REȘIȚA - 1995

CLASA a IX-a

1. Să se rezolve în **R** sistemul:

$$\begin{cases} x_1 = x_2^2 - 2x_2 + 2 \\ x_2 = x_3^2 - 2x_3 + 2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} = x_n^2 - 2x_n + 2 \\ x_n = x_1^2 - 2x_1 + 2 \end{cases}$$

2. În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A)=90^{\circ}$), D este proiecția lui A pe BC, O_1 și O_2 centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABD și ACD (respectiv), iar $\{E\}=BO_1 \cap CO_2$. Demonstrați că $O_1O_2 \perp AE$.
3. Să se determine funcțiile monotone $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care
$\underbrace{(f\circ f\circ\dots\circ f)}_{1995\text{ ori}}(x) = x, \quad (\forall)\, x\in\mathbb{R}.$
4. Fie M o mulțime de numere reale cu proprietățile:
(i) $\mathbb{Z}\subset M$
(ii) $x,y\in M \Rightarrow x+y\in M$ și $x\cdot y\in M$
(iii) $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}\in M$
Găsiți o ecuație cu coeficienți întregi care are rădăcina a.
Demonstrați că $-\sqrt{2}+\sqrt{3}\in M$.

CLASA a X-a

1. Fie u, v, w, z patru numere complexe având acelaşi modul astfel încât $z=u+v+w$.
   Să se calculeze:
   $E(u,v,w)=(u+v)(v+w)(w+u)$.
2. Există funcţii $f:\mathbf{R}\to(0,\infty)$ astfel încât $(f\circ f)(x)=a^x,\ (\forall)\,x\in\mathbf{R}$ unde $a\in(0,\infty)-\{1\}$ este un număr fixat?
3. Fie funcţiile $f_i:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ i=\overline{0,n}$ cu proprietatea că pentru orice $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ are loc relaţia:

   $$f_k(x)=k^3x^2-2k^2x+\frac{8}{9}k+f_{k-1}(x),\ (\forall)\,x\in\mathbf{R}$$

   iar $f_0(x)=\frac{1}{9},\ (\forall)\,x\in\mathbf{R}$.
   Demonstraţi că există $a\in\mathbf{N}$ şi $b\in\mathbf{Q}$, astfel încât:
   $f_n(x)=(ax+b)^2,\ (\forall)x\in\mathbf{R}$.
4. Fie ABCD un pătrat şi M,N puncte variabile pe laturile [BC], respectiv [CD], astfel încât $m(\sphericalangle MAN)=45^\circ$. În exteriorul pătratului ABCD se construiesc pătratele BMPQ şi DNRS. Să se demonstreze că aria triunghiului AQS este constantă.
5. Demonstraţi că dacă într-un paralelipiped dreptunghic între aria totală A_t, volumul v şi suma S a lungimilor tuturor muchiilor paralelipipedului are loc relaţia $A_t\cdot S=72v$ atunci paralelipipedul este un cub.

SOLUȚII
EDIȚIA a IX-a 1995 REȘIȚA

CLASA a IX-a

1. Sistemul se mai poate scrie

$$x_1-1=(x_2-1)^2$$
$$x_2-1=(x_3-1)^2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{n-1}-1=(x_n-1)^2$$
$$x_n-1=(x_1-1)^2$$

de unde obținem $x_1\ge 1; x_2\ge 1;\dots;x_{n-1}\ge 1; x_n\ge 1$.
Făcând substituiri succesive obținem:

$$x_1-1=(x_2-1)^2=(x_3-1)^4=\dots=(x_n-1)^{2^{n-1}}=(x_1-1)^{2^n}$$

sau $(x_1-1)^{2^n}-(x_1-1)=0$ cu $(x_1-1)\left[(x_1-1)^{2^n-1}-1\right]=0$.

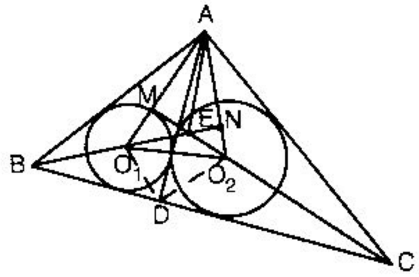
De aici avem $x_1-1=0$ sau $(x_1-1)^{2^n-1}-1=0$.
Dacă $x_1-1=0$ rezultă $x_1=1$ și de aici $x_2=1,\dots,x_n=1$.

Dacă $(x_1-1)^{2^n-1}-1=0$, atunci $x_1-1=1$, adică $x_1=2$ de unde $x_2=2,\dots,x_n=2$ doarece 2^n-1 este număr impar.
Deci sistemul are soluțiile:
$x_1=x_2=\dots=x_n=1$
$x_1=x_2=\dots=x_n=2$

2. Fie $AO_1\cap CE=\{M\}$ și $AO_2\cap BE=\{N\}$.

În triunghiul AMC avem $m(\sphericalangle ACM)=\frac{1}{2}m(\sphericalangle C)$ și

$m(\sphericalangle MAC)=m(\sphericalangle MAO_2)+m(\sphericalangle O_2AC)=45^0+\frac{1}{2}m(\sphericalangle B)$.



Atunci $m(\sphericalangle MAC)+m(\sphericalangle MCA)=45^0+\frac{1}{2}(m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle C))=$

$=45^0+\frac{1}{2}\cdot 90^0=90^0$.
Rezultă că $m(\sphericalangle AMO_2)=90^0$ și $O_2M\perp AO_1$.
Analog în triunghiul ANB avem:

$m(\sphericalangle ABN)+m(\sphericalangle BAN)=\frac{1}{2}m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle BAO_1)+m(\sphericalangle O_1AN)=$

$=\frac{1}{2}m(\sphericalangle B)+\frac{1}{2}m(\sphericalangle C)+45^0=90^0$ de unde $m(\sphericalangle ANB)=90^0$ și $O_1N\perp AO_2$. Atunci în triunghiul AO_1O_2 punctul E este ortocentru și avem $AE\perp O_1O_2$ c.c.t.d.

3. Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ar fi descrescătoare, atunci:
$f\circ f$ este crescătoare, $f\circ f\circ f$ - descrescătoare și
$\underbrace{f\circ f\circ\dots\circ f}_{1995\text{ ori}}$ descrescătoare.
Contradicție, deoarece $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=x$ este crescătoare.
Rezultă că f este crescătoare.
Dacă există $x_0\in\mathbf{R}$ astfel ca $f(x_0)<x_0$, atunci

$f(f(x_0))<f(x_0)<x_0$;

$(f\circ f\circ f)(x_0)<x_0;\dots,\left(\underbrace{f\circ f\circ\dots\circ f}_{1995\text{ ori}}\right)(x_0)<x_0$, contradicție.

Dacă există $x_0' \in \mathbf{R}$ astfel ca $f(x_0') > x_0'$, atunci

$$f\left(f(x_0')\right) > f(x_0') > x_0', \ldots, \left(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{1995 \text{ ori}}\right)(x_0') > x_0', \text{ contradicție.}$$

Deci $f(x)=x$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

4. Dacă $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, calculăm $(x-a)(x+a)(x-\bar{a})(x+\bar{a})$, unde $\bar{a}$ este irațional conjugat cu a.

$$(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3}) =$$

$$=\left[\left(x-\sqrt{2}\right)^2-3\right]\left[\left(x+\sqrt{2}\right)^2-3\right]=\left(x^2-2\sqrt{2}x-1\right)\left(x^2+2\sqrt{2}x-1\right)=$$

$$=\left(x^2-1\right)^2-\left(2\sqrt{2}x\right)^2=x^4-2x^2+1-8x^2=x^4-10x^2+1.$$

Deci ecuația $x^4-10x^2+1=0$, are coeficienți întregi și pe $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ca rădăcină.

Din faptul că a este rădăcină a ecuației $x^4-10x^2+1=0$ avem $\frac{1}{a}=10a-a^3$. Cum $\frac{1}{a}=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$, iar din (i) și (ii) rezultă că $10a-a^3 \in M$, avem $-\sqrt{2}+\sqrt{3} \in M$.

CLASA a X-a

1. Fie $|u|=|v|=|w|=|z|=\rho$.

Dacă $\rho=0$, atunci $u=v=w=z=0$ și $E(u,v,w)=0$.

Dacă $\rho \neq 0$ atunci $u \cdot \bar{u}=\rho^2; v \cdot \bar{v}=\rho^2; w \cdot \bar{w}=\rho^2; z \cdot \bar{z}=\rho^2$.

Atunci $z \cdot \bar{z}=z\left(\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}\right)=z\left(\frac{\rho^2}{u}+\frac{\rho^2}{v}+\frac{\rho^2}{w}\right)=$

$=\frac{\rho^2 z(uv+vw+uw)}{uvw}$, de unde

$\rho^2=\frac{\rho^2 z(uv+vw+uw)}{uvw}$ sau $uvw=z(uv+vw+uw)$.

În acest caz $E(u,v,w)=(z-u)(z-v)(z-w)=$
$=z^3-(u+v+w)z^2+(uv+vw+uw)z-uvw=$
$=z^3-z^3+uvw-uvw=0$ c.c.t.d.

2. Presupunem că există $f:\mathbf{R}\to(0,\infty)$ astfel încât

$(f \circ f)(x)=a^x$, de unde $(f \circ f \circ f)(x)=(f \circ f)(f(x))=a^{f(x)}$

sau $(f \circ f \circ f)(x)=f((f \circ f)(x))=f\left(a^x\right)$ și $a^{f(x)}=f\left(a^x\right)$.

Cum $f(x)=a^x>0$ rezultă că $f(y)>1 (\forall) y>0$.

Din $f(y)>1$ deducem $(f \circ f)(x)>1$, de unde $a^x>1$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$, contradicție.

Deci nu există funcții cu proprietatea cerută.

3. Scriind egalitățile pentru $k=\overline{1,n}$ avem succesiv

$$f_1(x)=1^3x^2-2\cdot1^2x+\frac{8}{9}\cdot1+f_0(x)$$

$$f_2(x)=2^3x^2-2\cdot2^2x+\frac{8}{9}\cdot2+f_1(x)$$

....

$$f_n(x)=n^3x^2-2\cdot n^2x+\frac{8}{9}\cdot n+f_{n-1}(x)$$

Însumând egalitățile obținem

$$f_n(x)=\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)x^2-2\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)x+\frac{8}{9}(1+2+\ldots+n)+\frac{1}{9}$$

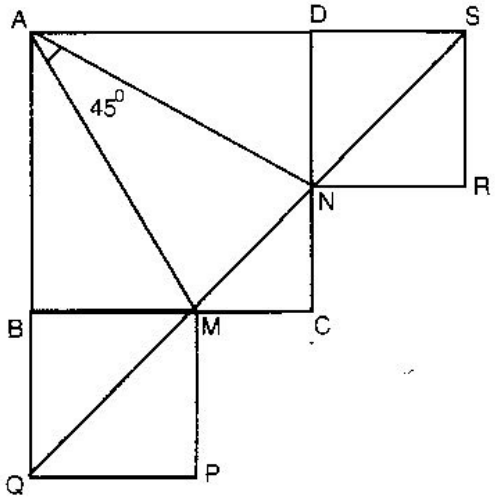
de unde

$$f_n(x)=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2x^2-2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)x+\frac{8}{9}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{9}=$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}x-\frac{2n+1}{3}\right]^2$$

De aici obținem $a=\frac{n(n+1)}{2}$ și $b=-\frac{2n+1}{3}$ și $f(x)=(ax+b)^2$ cu $a\in\mathbf{N}$ și $b\in\mathbf{Q}$.

$a\in\mathbf{N}$ deoarece $n(n+1)=2k$, pentru $(\forall)n\in\mathbf{N}$ și $b\in\mathbf{Q}$, deoarece $-(2n+1)\in\mathbf{Z}$, $(\forall)n\in\mathbf{N}$.

4. 

Triunghiul AQS fiind dreptunghic avem:

$$\sigma[AQS]=\frac{AQ\cdot AS}{2}=\frac{(AB+BQ)(AD+DS)}{2}=$$

$$=\frac{\left(AB+AB\,tg\left(B\hat{A}M\right)\right)\left(AD+AD\,tg\left(D\hat{A}N\right)\right)}{2}=$$

$$=\frac{AB\cdot AD\left(1+tg\left(B\hat{A}M\right)+tg\left(D\hat{A}N\right)+tg\left(B\hat{A}M\right)\cdot tg\left(D\hat{A}N\right)\right)}{2}=$$

$$=\sigma[ABCD]\cdot\frac{1+tg\left(B\hat{A}M\right)+tg\left(D\hat{A}N\right)+tg\left(B\hat{A}M\right)\cdot tg\left(D\hat{A}N\right)}{2}$$

Cum $m(\sphericalangle MAN)=45^0$ rezultă că $m(\sphericalangle BAM)+m(\sphericalangle DAN)=45^0$ de

unde $tg[m(\sphericalangle BAM)+m(\sphericalangle DAN)]=1$ sau:

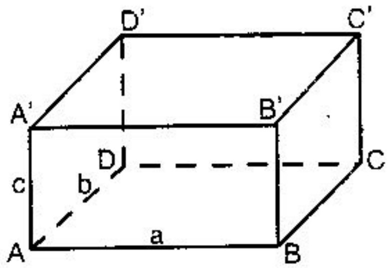
$$\frac{tg\left(B\hat{A}M\right)+tg\left(D\hat{A}N\right)}{1-tg\left(B\hat{A}M\right)\cdot tg\left(D\hat{A}N\right)}=1.$$

De aici $1+tg\left(B\hat{A}M\right)+tg\left(D\hat{A}N\right)+tg\left(B\hat{A}M\right)\cdot tg\left(D\hat{A}N\right)=2$

și $\sigma[AQS]=\sigma[ABCD]\cdot\frac{2}{2}=\sigma[ABCD]$.

Deci $\sigma[AQS]=const.$

5. Muchiile fiind de lungimi a,b,c avem:
$A_t=2(ab+bc+ca)$
$V=abc$
$S=4(a+b+c)$



Din relația dată obținem:

$(ab+bc+ca)(a+b+c)=9abc$ sau $\frac{a+b+c}{3}=\frac{3}{\frac{ab+bc+ca}{abc}}$,

adică $\frac{a+b+c}{3}=\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

Dar $m_a=\frac{a+b+c}{3}$ și $m_{arm}=\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ și din inegalitatea mediilor avem $m_{arm}\le m_a$ cu egalitate pentru a=b=c, adică atunci când paralelipipedul este un cub.

EDIŢIA a IX-a - REŞIŢA - 1995

Clasa a XI-a

1. Fie f un polinom neconstant cu coeficienţi reali, care are semn constant pe **R**. Să se arate că dacă A este o matrice pătratică cu elemente numere reale având dimensiunea egală cu gradul polinomului f atunci det (f(A)) ≥ 0.

* * *

2. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[k]{C_n^k} = 0$.

* * *

3. Fie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, derivabilă cu proprietatea că $f'(x) \geq f(x)$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.

a) Determinați funcțiile mărginite cu proprietățile de mai sus.

b)Demonstrați că dacă f admite cel puțin două puncte fixe, atunci unul dintre acestea este în $(0, 1]$.

* * *

4. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietățile:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + f(x) \cdot f(y),\ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R} \text{ și } f(x) \geq \frac{x}{2},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

a) Să se arate că $f(x) \leq \dfrac{-x}{2+x}$ pentru orice $x \in [-1, 1]$;

b) Să se determine funcția f;

c) Fie șirul definit prin $x_0 = -1$, $x_{n+1} = f(x_n)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Să se studieze convergența șirului $(nx_n)_{n \geq 0}$.

* * *

Clasa a XII-a

1. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \left\{\dfrac{1}{x}\right\} \sin^2 \dfrac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ unde $a \in \mathbf{R}$.

Arătați că f admite primitive pe $\mathbf{R}$ dacă și numai dacă $a = \dfrac{1}{4}$.

* * *

2. Determinați toate funcțiile $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ care sunt integrabile pe $[0, 1]$, continue pe $(0, \infty)$ și care în plus verifică relația $\displaystyle\int_0^{xy} f = \left(\int_0^x f\right) \cdot \left(\int_0^y f\right)$ pentru orice $x \geq 0$, $y \geq 0$.

* * *

3. Fie $n \in \mathbf{N}^*$, $(G = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, *)$ un grup și $f : D \to \mathbf{R}$ o funcție. Considerăm matricea $A = (a_{ij})$, unde $a_{ij} = f\left(x_i\, x_j^{-1}\right)$; $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n}$. Arătați că pentru orice $p \in \mathbf{N}$ suma elementelor din fiecare linie a matricei A^p este aceeași.

* * *

4. a) Determinați toate automorfismele grupului aditiv $\mathbf{R}$ care în plus sunt crescătoare pe $\mathbf{R}$;

b) Determinați toate automorfismele inelului $(\mathbf{R}, +, \cdot)$.

* * *

EDIȚIA a IX-a - REȘIȚA - 1995

Clasa a XI-a

1. Funcția f este definită de un polinom neconstant care are semn constant pe **R** și sgn(f(x)) = −1, (∀) x ∈ **R** sau sgn(f(x)) = 1 (∀) x ∈ **R**. Rezultă că f nu are rădăcini reale, adică există b_i, $c_i \in \mathbf{R}$; $i = \overline{1, p}$ nu neapărat distincte cu $b_i^2 - 4c_i < 0$ și există $a \in \mathbf{R}^*$ astfel încât:

$$f(x) = a(x^2 + b_1x + c_1)(x^2 + b_2x + c_2)\cdots(x^2 + b_px + c_p).$$

Atunci $f(A) = a(A^2 + b_1A + c_1I_{2p})(A^2 + b_2A + c_2I_{2p})\cdots(A^2 + b_pA + c_pI_{2p})$.

Prin trecere la determinanți și ținând cont că A și I_{2p} sunt matrice de ordinul 2p, obținem:

$$\det(f(A))=a^{2p}\det(A^2+b_1A + c_1I_{2p})\det(A^2 + b_2A + c_2I_{2p})\cdots\det(A^2 + b_pA + c_pI_{2p}).$$

Avem nevoie de proprietatea că dacă A și B sunt matrice pătratice de ordinul n cu elemente din **R** și AB = BA atunci $\det(A^2 + B^2) \geq 0$. Cum $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$ atunci $\det(A^2 + B^2) = \det(A + iB)\det(A - iB)$.

Dacă $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ cu $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbf{R}$ pentru orice i, j ∈ {1, 2, ..., n} atunci $\det(A + iB) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{p=1}^{n} \left(a_{j\sigma(j)} + ib_{j\sigma(j)}\right)$ și

$$\det(A - iB) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{p=1}^{n}\left(a_{j\sigma(j)} - ib_{j\sigma(j)}\right) = \overline{\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{p=1}^{n}\left(a_{j\sigma(j)} + ib_{j\sigma(j)}\right)} =$$
$$= \overline{\det(A + iB)}.$$

Am folosit faptul că $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$, deci $\overline{\varepsilon(\sigma)} = \varepsilon(\sigma)$. Deci $\det(A^2 + B^2) = |\det(A + iB)|^2 \geq 0$. Fie $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Atunci:

$$A^2 + b_kA + c_kI_{2p} = \left(A + \frac{b_k}{2}I_{2p}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{c_k - b_k^2}}{2}I_{2p}\right)^2, \text{ de unde:}$$

$\det(A^2 + b_kA + c_kI_{2p}) \geq 0$.

Cum $\det(f(A)) = a^{2p}\det(A^2 + b_1A + c_1I_{2p})\det(A^2 + b_2A + c_2I_{2p})\cdots \det(A^2 + b_pA + c_pI_{2p})$ rezultă că $\det(f(A)) \geq 0$.

2. Din $C_n^k = n(n-1)\cdots(n-k-1) \leq \underbrace{n\cdot n\cdots n}_{de\ k\ ori} = n^k$ avem $\sqrt[k]{C_n^k} \leq n$ şi $\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{C_n^k} \leq n^2$.

Atunci $0 \leq \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{C_n^k} \leq \frac{1}{n}$ şi folosind teorema cleştelui avem:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{C_n^k} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}, \text{ de unde } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{C_n^k} = 0.$$

3. Presupunem că există o funcţie f cu proprietăţile din enunţ şi atunci:

$\left(\frac{f^{-2}(x)}{-2}\right)' = f^{-1}(x)f'(x) \geq 1$, $(\forall)\ x > 0$ şi funcţia $g : (0, \infty) \to \mathbf{R}$,

$g(x) = \frac{f^{-2}(x)}{2} - x$ este crescătoare pe $(0, \infty)$.

De aici rezultă că există $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f^{-2}(x)}{-2} - x\right) = l \in (-\infty, \infty]$.

Pe de altă parte $\frac{f^{-2}(x)}{-2} - x \leq -x$ şi atunci $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f^{-2}(x)}{-2} - x\right) = -\infty$. Am ajuns la o contradicţie, de unde rezultă că nu există funcţii cu proprietăţile din enunţ.

4. a) Pentru $x = y = 0$ în relaţia din enunţ obţinem $f^2(0) = f(0)$, adică $f(0) = 0$ sau $f(0) = 1$. Dacă am avea $f(0) = 1$ atunci pentru $y = 0$ în relaţia din enunţ obţinem $f(x) = -1$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$ şi în particular $f(0) = -1$, imposibil.

Rămâne $f(0) = 0$. Relaţia din enunţ poate fi scrisă sub forma:

$f(x + y) + 1 = (f(x) + 1)(f(y) + 1)$; $x, y \in \mathbf{R}$.

Cu notaţia $g(x) = f(x) + 1$ obţinem $g(x + y) = g(x)\cdot g(y)$ şi $g(0) = 1$.

Din faptul că $g(x) \geq 1 - \frac{x}{2}$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, rezultă $g(x) > 0$ pentru orice $x < 0$. Pentru $y = -x$ în relaţia iniţială obţinem $f(-x) = -\frac{f(x)}{1 + f(x)} \geq \frac{x}{2}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, de unde $f(x) \leq \frac{-x}{x+2}$, $(\forall)\ x > -2$.

b) $g(x) \geq 1 - \frac{x}{2}$, adică $g\left(\frac{x}{2}\right) \geq 1 - \frac{x}{4}$, de unde $g(x) = \left[g\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \geq \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2$.

Fie $k \in \mathbf{N}^*$. Presupunem că $g(x) \geq \left(1 - \frac{x}{2^{k+1}}\right)^{2^k}$.

Atunci $g(x) = \left[g\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \geq \left[\left(1 - \frac{x}{2^{k+2}}\right)^{2^k}\right]^2 = \left(1 - \frac{x}{2^{k+2}}\right)^{2^{k+1}}$.

În baza principiului inducţiei matematice avem $g(x) \geq \left(1 - \frac{x}{2^{n+1}}\right)^{2^n}$, $(\forall) x\in\mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Prin trecere la limită, pentru $n \to \infty$, rezultă că $g(x) \geq e^{-\frac{x}{2}}$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$.

Cum $g(x)e^{\frac{x}{2}} \leq g(x)\ g(-x) = 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ rezultă $g(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$.

Rezultă că $g(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ şi $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} - 1$, $x\in\mathbf{R}$.

c) Se observă că $x_0 < 0$, $x_2 < 0$, $x_1 > 0$ şi se demonstrează imediat prin inducţie matematică faptul că $x_{2k} < 0$ şi $x_{2k+1} > 0$ pentru fiecare $k \in \mathbf{N}$.

Apoi avem $x_1 = f(x_0) \leq \frac{1}{2-1}$; $x_2 = f(x_1) \geq -\frac{x_1}{2} \geq -\frac{1}{2}$.

Pentru $n \in \mathbf{N}$ presupunem că $x_{2n} \geq \frac{1}{2^n}$ şi $x_{2n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1} - 1}$. Atunci:

$$x_{2n+2} = f(x_{2n+1}) \geq \frac{x_{2n+1}}{2} \geq -\frac{1}{2\left(2^{n+1}-1\right)} \geq -\frac{1}{2^{n+1}} \text{ şi}$$

$$x_{2n+3} = f(x_{2n+2}) \leq \frac{-x_{2n+2}}{x_{2n+2}+2} \leq \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{2-\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2^{n+2}-1}.$$

În baza principiului inducţiei matematice rezultă că $x_{2k} \geq \frac{1}{2^k}$ şi $x_{2k+1} \leq$ $\leq \frac{1}{2^{k+1}-1}$ pentru fiecare $k \in \mathbf{N}$. Acum $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 0$.

Clasa a XII-a

1. Fie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(t) = \{t\}\sin^2\pi t$, care este continuă pe $\mathbf{R} - \mathbf{Z}$. În plus $|g(t)| \leq \sin^2\pi t$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$, iar pentru fiecare $k \in \mathbf{Z}$, avem

$$\lim_{t\to k}\sin^2(\pi t) = 0.$$

Din criteriul majorării rezultă că există $\lim\limits_{t\to k} g(t) = 0$. Din aceasta şi din faptul că $g(k) = 0$, $k \in \mathbf{Z}$, rezultă că g este continuă pe $\mathbf{R}$ şi în consecinţă g admite primitive pe $\mathbf{R}$.

Fie $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, derivabilă pe $\mathbf{R}$ cu $G' = g$. Considerăm funcţia $F : \mathbf{R} \to$ $\to \mathbf{R}$, definită prin $F(x) = \begin{cases} x^2 G\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Funcţia F este derivabilă pe $\mathbf{R} - \{0\}$ şi în plus:

$F'(x) = 2xG\left(\frac{1}{x}\right) - g\left(\frac{1}{x}\right)$ pentru orice $x \neq 0$.

Avem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{G\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ (1), de unde rezultă că F este derivabilă în $x_0 = 0$ dacă şi numai dacă există, sunt finite şi egale limitele:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(t)}{t} \quad \text{şi} \quad \lim_{t\to-\infty}\frac{G(t)}{t}.$$

Pentru a dovedi acest lucru se observă că g este periodică, de perioadă $T = 1$, de unde rezultă că funcţia $G(x+1) - G(x)$ este constantă pe $\mathbf{R}$, având derivata nulă pe $\mathbf{R}$. În plus,

$$G(x+1) - G(x) = G(1) - G(0) = \int_0^1 t\cdot\sin^2\pi t\,dt = \frac{1}{4} \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R}$$

Deci funcţia $H : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $H(x) = G(x) - \frac{1}{4}x$ este periodică, de perioadă $T = 1$. Funcţia H este continuă pe $[0, 1]$, deci şi mărginită pe $[0, 1]$. De aici şi din faptul că H este periodică rezultă că H este mărginită pe $\mathbf{R}$, deci există $M \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încât $|H(x)| \leq M$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. De aici deducem că $\left|\frac{G(x)}{x} - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{M}{x}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ şi în consecinţă $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{G(x)}{x} = \frac{1}{4}$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă că F este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $F'(0) = \frac{1}{4}$.

Considerăm descompunerea $F'(x) = h(x) - u(x)$, unde

$$h(x) = \begin{cases} 2xG\left(\frac{1}{2}\right), & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases} \quad \text{şi } u(x) = \begin{cases} g\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 0 \end{cases}$$

h este continuă pe $\mathbf{R}$ şi admite primitive pe $\mathbf{R}$. Rezultă că $u = h - F'$ admite primitive pe $\mathbf{R}$ şi $f_{\frac{1}{4}}$ admite primitive pe $\mathbf{R}$.

Mai considerăm şi funcţia $v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$v(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ a - \frac{1}{4}, & x = 0 \end{cases}$$

Obţinem că $f = u + v$, deci f_a admite primitive dacă şi numai dacă v admite primitive pe $\mathbf{R}$. Dacă f admite primitive atunci v admite primitive şi în consecinţă $v(\mathbf{R})$ este un interval.

Deci $v(\mathbf{R})$ este un interval dacă şi numai dacă $a = \frac{1}{4}$.

2. Fie $x > 0$ şi $\delta \geq 0$ cu $\delta < \min\{1, x\}$. Este evident că f este integrabilă pe $[0, \delta] \subset [0, 1]$ şi continuă (deci integrabilă) pe $[\delta, x]$. Rezultă că f este integrabilă pe $[0, x]$. Funcţia $g : [0, \infty] \to \mathbf{R}$, definită prin $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, este continuă pe $[0, \infty]$. Ecuaţia din enunţ se scrie sub forma $g(xy) = g(x)\, g(y)$, $(\forall)\ x, y \geq 0$. (1)

Din (1) rezultă că $g^2(1) = g(1)$ deci $g(1) = 0$ sau $g(1) = 1$. Dacă $g(1) = 0$ atunci obţinem $g(x) = 0$ pentru orice $x \geq 0$.

Fie $x > 0$ şi cum f este continuă în x rezultă că g este derivabilă în x, de unde rezultă că $f(x) = 0$ pentru orice $x > 0$. Obţinem o primă familie de soluţii şi anume: $\mathcal{F}_1 = \left\{ f : [0, \infty) \to \mathbf{R},\quad f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases} \middle|\ \alpha \in \mathbf{R} \right\}$.

Dacă $g(1) = 1$, atunci din faptul că $g(x^2) = (g(x))^2$ rezultă că $g(t) \geq 0$ pentru orice $t \geq 0$. Pe de altă parte dacă ar exista $\eta > 0$ cu $g(\eta) = 0$, atunci $1 = g\left(\eta \cdot \frac{1}{\eta}\right) = g(\eta) g\left(\frac{1}{\eta}\right) = 0$, contradicţie. Rezultă că $g(x) > 0$ pentru orice $x > 0$.

Considerăm funcţia $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $h(x) = \ln(g(e^x))$. Se poate verifica uşor că $h(x + y) = h(x) + h(y)$ pentru orice x şi y reali. Ţinând cont de faptul că h este continuă pe $\mathbf{R}$ se arată uşor că există $\beta \in \mathbf{R}$ astfel încât $h(x) = \beta x$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Obţinem imediat că $g(y) = y^\beta$ pentru orice $y > 0$.

Din egalitatea $x^\beta = \int_0^x f(t)dt$, $x > 0$ prin derivare obţinem $f(x) = \beta x^{\beta - 1}$, $x > 0$. Dar f este integrabilă pe $[0, 1]$ şi în particular mărginită. Rezultă $\beta \geq 1$. Obţinem o a doua familie de soluţii:

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ f : [0, \infty) \to \mathbf{R},\quad f(x) = \begin{cases} \beta x^{\beta-1}, & x > 0 \\ \xi, & x = 0 \end{cases} \middle|\ \beta \geq 1, \xi \in \mathbf{R} \right\}.$$

3. Se observă că $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{x \in G} f(x) = a_f$. Prin inducţie după p se poate stabili forma lui A^p. Notăm $A^p = \left(a_{ij}^{(p)}\right)$ şi considerăm că $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(p)} = c_p$, atunci:

$$a_{ij}^{(p+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(p)} a_{kj} \text{ şi } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(p+1)} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(p)} a_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(p)}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\right) = a_f c_p.$$

4. a) Din condiţia de morfism rezultă $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$. De aici pentru $x = y$ obţinem $f(2x) = 2f(x)$. Fie $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Presupunem că $f(nx) = nf(x)$. Punem $y = nx$ în relaţia iniţială şi obţinem $f((n + 1)\, x) = (n + 1)\, f(x)$. Pe baza principiului inducţiei matematice rezultă că $f(kx) = kf(x)$, pentru orice $k \in \mathbf{N}$. Mai mult pentru $y = -x$ obţinem $f(-x) = -f(x)$. Dacă $k \in \mathbf{N}$ atunci $f((-k))\, x) = f(-kx) = -f(kx) = -kf(x)$. Din cele de mai sus rezultă că pentru orice $m \in \mathbf{Z}$, avem $f(mx) = mf(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Pentru $n \in \mathbf{N}$ avem $f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = n f\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(1)$.

Pentru $m \in \mathbf{Z}$ şi $n \in \mathbf{N}$, obţinem $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = m \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1)$.

Rezultă că pentru orice $x \in \mathbf{Q}$ avem $f(x) = x\, f(1)$.

Fie $x_0 \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. Atunci există $a_n \in \mathbf{Q}$, $b_n \in \mathbf{Q}$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0$. Mai mult se poate considera că $(a_n)_n$ este crescător, iar $(b_n)_n$ este descrescător (se pot considera şirul $(a_n)_n$ al aproximărilor zecimale prin lipsă ale lui x_0 şi respectiv şirul aproximărilor zecimale prin adaus $(b_n)_n$).

Din faptul că f este crescătoare pe $\mathbf{R}$ şi din $a_n \leq x_0 \leq b_n$ rezultă $a_n f(1) \leq \leq f(x_0) \leq b_n f(1)$. (*)

Prin trecere la limită în (*) obţinem $f(x_0) = f(1) \cdot x_0$. Din cele arătate până acum rezultă că $f(x) = f(1)\, x$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Dacă $f(1) < 0$ atunci f este strict descrescătoare pe $\mathbf{R}$, iar dacă $f(1) = 0$ atunci este constantă, deci nu poate fi automorfism. Urmează că automorfismele crescătoare ale lui $\mathbf{R}$ sunt funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \alpha x$, $\alpha > 0$.

b) Din condiţia de morfism se obţin relaţiile $f(x^2) = (f(x))^2 \geq 0$ şi $f(x - y) = f(x) - f(y) \geq 0$ pentru orice $x \geq y$.

Urmează că f este crescătoare pe $\mathbf{R}$. Utilizând punctul a) rezultă că există $\alpha > 0$ astfel încât $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

De aici şi din faptul că $f(1) = 1$ rezultă că $f(x) = x$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$