EDIȚIA a VIII-a, LUGOJ - 1994

CLASA a V-a

1. La un cerc de matematică profesorul are $3n+9$ probleme pe care le împarte în mod egal la $2n+2$ elevi prezenți ($n \in \mathbf{N}$). Aflați numărul elevilor prezenți la cerc, știind că acesta este mai mare decât 10.

***

2. Pentru rezolvarea problemelor primite la „Concursul Traian Lalescu" orice elev din clasa a V-a are dreptul să discute timp de 1 minut, o singură dată, cu fiecare din ceilalți concurenți. Discuția are loc la catedră unde sunt doar două locuri. Știind că fiecare concurent a beneficiat de acest drept, iar timpul de lucru a fost 2 ore, aflați numărul maxim de concurenți la clasa a V-a.

***

3. Dintr-un grup de 7 sportivi R, S, T, U, X, Y, Z trebuie aleși 4 pentru a forma o echipă de ștafetă. Alegerea celor 4 se face respectând următoarele reguli:
   - dacă R este ales atunci T trebuie ales.
   - dacă S este ales atunci U trebuie ales.
   - dacă X și Y sunt aleși atunci T nu poate fi ales.

   a) Dacă X și Y sunt aleși, care din următorii trebuie să fie ales: 1) R, 2) S, 3)T, 4) U, 5)Z.

   b) Dacă U nu este ales, care sunt posibilitățile de formare a echipei?

***

CLASA a VI-a

1. Să se arate că numărul:
   $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 1994 + 5$ nu poate fi pătrat perfect.

***

2. Să se calculeze suma:

$$S=(-1)^1+(-1)^{1+2}+(-1)^{1+2+3}+\ldots+(-1)^{1+2+3+\ldots+1994}$$

***

3. Fie ABC un triunghi cu AB=AC=3, BC=4 și punctele D_1, D_2, D_3,...D_{997}. Să se arate că există un punct $M\in[AB]\cup[BC]\cup[CA]$ astfel încât $MD_1+MD_2+\ldots+MD_{997}\geq 1994$.

***

4. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, O un punct în interiorul său cu OA=OB=OC și $M\in(OA)$ astfel încât $m(\sphericalangle MAB)+m(\sphericalangle MBC)+m(\sphericalangle MCA)=90^0$.
Să se arate că triunghiul ABC este isoscel.

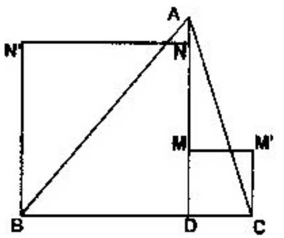
***

CLASA a VII-a

1. Să se arate că dacă: $\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=2\sqrt{z+1}$ atunci $x+y\geq 2z$

***

2. Pompând fiecare același număr întreg de litri de apă, cei k invitați ai lui Edison au umplut bazinul din parcul vilei acestuia. Dacă numărul invitaților ar fi mai mare cu 3 și fiecare ar fi pompat câte 18 litri, ar mai lipsi 5 litri pentru a umple bazinul. Să se determine k știind că este cel puțin 10.
3. În figura de mai jos AD este înălțime iar BDNN', CDMM' sunt pătrate. Demonstrați că BM' și CN' se intersectează pe AD.



***

4. Fie M mijlocul bazei [BC] a triunghiului isoscel ABC ([AB]≡[AC]), N piciorul perpendicularei din M pe AC și P mijlocul [MN]. Demonstrați că $AP\perp BN$.

***

CLASA a VIII-a

1. Fie $a, b\in\mathbf{R}_+^*$ și $x, y\in[a,b]$. Să se arate că

$$2\leq\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\leq\frac{a}{b}+\frac{b}{a}.$$

***

2. Fie un polinom de gradul 1994 având toți coeficienții distincți, întregi și de modul mai mic sau egal cu 997. Să se arate că (x-1) divide P(x).

***

3. Fie polinomul $P(x)=(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\cdots(x^{2^n}+1)$ unde $n\in\mathbf{N}$.
   a) Să se găsească gradul lui P.
   b) Să se găsească suma coeficienților lui P.
   c) Să se găsească produsul coeficienților lui P.
4. Fie în spațiu cinci puncte distincte A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 astfel încât:
   1) $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4A_5$ și
   2) $A_1A_2\perp A_2A_3$, $A_2A_3\perp A_3A_4$, $A_3A_4\perp A_4A_5$.
   Să se arate că:
   i) $A_1A_4\leq\sqrt{5}$
   ii) $A_1A_5\leq 2\sqrt{2}$
   iii) Pot avea loc egalitățile de mai sus?

***

5. Fie ABCDA'B'C'D' un cub de latură ℓ. Fie $M\in(AA')$ astfel încât $AM=\frac{\ell}{4}$ și $N\in(AB)$ astfel încât $AN>\frac{3}{16}\ell$ și $AN\neq\frac{\ell}{2}$. Prin M și N se duc planele π respectiv π' perpendiculare pe MN.
   a) Să se determine muchiile pe care le intersectează planele π și π'.
   b) Fie P un punct în spațiu astfel încât triunghiul MNP este dreptunghic. Se poate găsi acesta pe (C'D')? Dar pe (BC)?

SOLUȚII
EDIȚIA a VIII-a 1994 LUGOJ

CLASA a V-a

1. Fiecare elev primește $\frac{3n+9}{2n+2} \in \mathbf{N}$ probleme.

   Trebuie să găsim $n \in \mathbf{N}$ pentru care $\frac{3n+9}{2n+2} \in \mathbf{N}$.

   Dacă $\frac{3n+9}{2(n+1)} \in \mathbf{N}$ atunci și $2 \cdot \frac{3n+9}{2(n+1)} \in \mathbf{N}$, adică $\frac{3n+9}{n+1} \in \mathbf{N}$

   de unde $\frac{3(n+1)+6}{n+1} = 3 + \frac{6}{n+1} \in \mathbf{N}$.

   De aici rezultă că $\frac{6}{n+1} \in \mathbf{N}$, adică n+1=1; n+1=2;n+1=3;n+1=6

   deci $n \in \{0,1,2,5\}$

   Cum numărul elevilor prezenți la cerc este mai mare ca 10, rezultă că n=5 și elevi prezenți la cerc au fost 12.
2. Notând cu n numărul maxim de concurenți avem: $(n-1)+(n-2)+...+3+2+1 \leq 120$, numărul minutelor din cele două ore de concurs.

   Suma $(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1$ este egală cu $\frac{n(n-1)}{2}$

   și obținem inegalitatea: $\frac{n(n-1)}{2} \leq 120 \Leftrightarrow n(n-1) \leq 16 \cdot 15$, adică

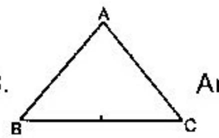
   $n \leq 16$. Deci la concurs au fost cel mult 16 concurenți.
3. a)Dacă x și y sunt aleși, atunci T nu poate fi ales și nici R nu poate fi ales. Atunci este ales S și U sau U,Z și echipa are alcătuirea X,Y,S,U sau X,Y,U,Z.

b) Dacă U nu este ales, atunci S nu este ales. Rămân posibilitățile R,T,Z,X sau R,T,Z,Y, deoarece X și Y în echipă nu acceptă T în echipă conform condițiilor din ipoteză.

CLASA a VI-a

1. Numărul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 1994$ are în compunere puteri ale lui 2 și 5 și ultimile sale cifre vot fi zero. Conținând pe 2^3 și 5^3 are ca ultime cifre mai mult de trei zerouri. Atunci $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 1994 + 5$ are ultimile două cifre 05 și rezultă că numărul nu este pătrat perfect.
2. Numerele:

   1,
   1+2,
   1+2+3+4+5;
   1+2+3+4+5+6;
   ...,
   1+2+3+...+1993;
   1+2+3+...1994 sunt impare și avem 998 termeni de -1 în sumă.
   Numerele:
   1+2+3;
   1+2+3+4;
   1+2+3+4+5+6+7;
   1+2+3+4+5+6+7+8;
   ...
   1+2+3+...+1992 sunt pare și avem 996 de termeni de +1 în sumă. Deci S=-2.

3. 

Arătăm că una din sumele:

   $BD_1+BD_2+BD_{997}$ sau $CD_1+CD_2+...+CD_{997}$ este mai mare sau egală cu 1994. Dacă presupunem prin absurd că:

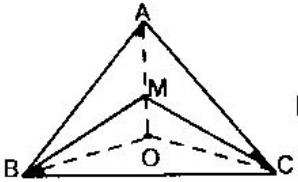
   $BD_1 + BD_2 + \cdots BD_{997} < 1994$ și

   $CD_1 + CD_2 + \cdots + CD_{997} < 1994$ atunci, prin adunare, am obține:

   $BD_1 + BD_2 + \cdots + BD_{997} + CD_1 + CD_2 + \cdots + CD_{997} < 2 \cdot 1994$ sau

$(BD_1+CD_1)+(BD_2+CD_2)+\dots+(BD_{997}+CD_{997})<2\cdot 1994$

Dar $BD_1+CD_1 \geq BC=4;\dots;BD_{997}+CD_{997}\geq 4$ deci membrul stâng este cel puțin 4·997=2·1994,absurd.
(Soluție dată de M. Mihet, Timișoara).

4. 

Dacă OA=OB=OC, atunci ΔOAB, ΔOBC și ΔOAC sunt isoscele și fie: m(∢OAB)=m(∢OBA)=x; m(∢OBC)=m(∢OCB)=y; m(∢OAC)=m(∢OCA)=z.
Atunci: m(∢A)=x+z; m(∢B)=x+y și m(∢C)=y+z de unde: x+z+x+y+y+z=180°, adică x+y+z=90°.
Din ipoteză avem și: m(∢MAB)+m(∢MBC)+m(∢MCA)=90° adică: m(∢MBC)+m(∢MCA)=y+z de unde:
m(∢MBO)+y+z-m(∢MCO)=y+z și m(∢MBO)=m(∢MCO).
Rezultă că m(∢MBC)=y+m(∢MBO)=y+m(∢MCO)=m(∢MCB) și ΔMBC este isoscel cu MB=MC.
Atunci ΔMBO≡ΔMCO, având toate laturile congruente și rezultă că m(∢BOM)=m(∢COM), adică ΔBOA≡ΔCOA având două laturi congruente și unghiurile cuprinse între ele congruente. De aici avem AB=AC și ΔABC este isoscel.

CLASA a VII-a

1. Prin ridicarea egalității date la pătrat obținem:

$$x+1+2\sqrt{(x+1)(y+1)}+y+1=4z+4 \text{ sau}$$

$$x+y+2\sqrt{(x+1)(y+1)}=4z+2.$$

Folosind inegalitatea mediilor avem:

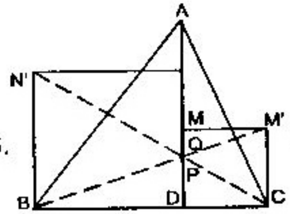
$$x+y+2\sqrt{(x+1)(y+1)}\leq x+y+2\cdot\frac{(x+1)+(y+1)}{2}=2(x+y+1)$$

Atunci, ținând cont de egalitatea dată avem:

$4z+2\leq 2(x+y+1)$, adică $2z\leq x+y$ c.c.t.d.

2. Fie $n\in \mathbf{Z}_+$ numărul de litri pe care-i pompează fiecare invitat.

Atunci avem relația k·n=(k+3)·18+5, de unde rezultă k(n-18)=59. Cum k∈**Z** rezultă că $k|59$, adică k=1 sau k=59.
Cum k este cel puțin 10 rezultă k=59.

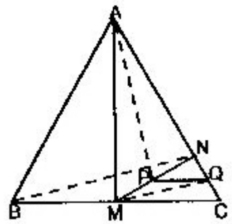
3. 

Presupunem că AD∩BM'={P}. Atunci în ΔBCM' avem PD IICM' și ΔBCM~ΔBDP de unde

$$\frac{PD}{M'C}=\frac{BD}{BC} \text{ și } PD=\frac{BD\cdot DC}{BC}$$

De asemenea considerăm că AD∩NC'={Q} și în ΔBCN' avem DQ II BN' și ΔDQC~ΔDN'C de unde $\frac{DQ}{BN'}=\frac{DC}{BC}$ și:

$$DQ=\frac{BN'\cdot DC}{BC}=\frac{BD\cdot DC}{BC}.$$ Rezultă că DP=DQ și P=Q. Rezultă că BM'∩CN'={P} cu P∈ AD.

4. 

Fie Q mijlocul segmentului [NC]. Atunci în ΔBCN segmentul [MQ] este linie mijlocie și MQ II BN. Apoi în ΔMCN segmentul [PQ] este linie mijlocie și PQ II MC. Atunci în ΔAMQ avem PQ⊥AM, deoarece MC⊥AM, apoi MN⊥AQ din ipoteză, de unde rezultă că P este ortocentrul în ΔAMQ și rezultă că și AM⊥MQ. Cum MQ II BN rezultă că AP⊥BN c.c.t.d.

CLASA a VIII-a

1. Din faptul că $a,b \in \mathbf{R}_+^*$ şi $x,y \in [a,b]$ rezultă că şi $x,y \in \mathbf{R}_+^*$ şi folosind inegalitatea mediilor avem: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=2$ şi prima parte a inegalităţii este dovedită. Cum $x,y \in [a,b]$, fără a restrânge generalitatea putem presupune $a \leq x \leq y \leq b$, de unde rezultă: $(ay-bx)(ax-by) \geq 0$. Efectuând calculele obţinem:
$a^2xy - aby^2 - abx^2 + b^2xy \geq 0$ sau:
$(a^2+b^2)xy \geq ab(x^2+y^2) \Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq \frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ c.c.t.d.

2. Fie $P(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots+a_{1993}X^{1993}+a_{1994}X^{1994}$ care are în total 1995 termeni cu $|a_i| \leq 997$, $i=\overline{0,1994}$.
Cum coeficienţii sunt întregi şi distincţi rezultă că:
$a_i \in \{-997;-996;\ldots;-1,0,1,\ldots,996,997\}$ în număr de 1995.
Pentru ca $X-1 | P(X)$ este necesar ca $P(1)=0$.
$P(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{1993}+a_{1994}$. Din cele expuse anterior avem coeficienţi opuşi doi câte doi şi unul din ei cu valoarea zero. În acest caz rezultă că suma lor este zero şi $P(1)=0$, adică:
$X-1 | P(X)$.

3. Putem scrie $(X-1)P(X)=(X-1)(X+1)(X^2+1)(X^4+1)\cdots(X^{2^n}+1)=$

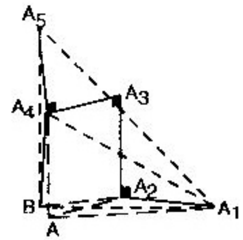
$=(X^2-1)(X^2+1)(X^4+1)\cdots(X^{2^n}+1)=(X^4-1)(X^4+1)\cdots(X^{2^n}+1)=$

$=\ldots=X^{2^{n+1}}-1$. Deci $P(X)=\frac{X^{2^n}-1}{X-1}$ de unde:
$P(X)=X^{2^{n+1}-1}+X^{2^{n+1}-2}+\cdots+X^2+X+1$

Deci grad $P=2^{n+1}-1$.

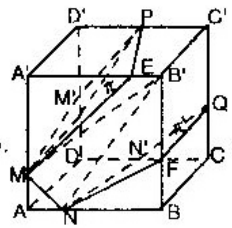
b) $S=1+1+1+\ldots+1=2^{n+1}-1$; c) $P=\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{2^{n+1}-\text{ori}}=1$

4. a) Fie $AA_4 \parallel A_2A_3$, $AA_4=A_2A_3$. Atunci patrulaterul $AA_2A_3A_4$ este un dreptunghi şi $A_2A_3 \perp A_2A$. Cum $A_2A_3 \perp A_1A_2$ rezultă că $A_2A_3 \perp (AA_1A_2)$ şi $AA_4 \perp (AA_1A_2)$. Deci ΔA_4AA_1 este dreptunghic în A şi avem $A_1A_4^2=AA_4^2+AA_1^2$.
În ΔAA_1A_2 avem $AA_1<AA_2+A_2A_1=2A_1A_2$.
Atunci $A_1A_4^2 \leq AA_4^2+4A_1A_2^2=5l^2$, adică $A_1A_4 \leq \sqrt{5}l$. Dacă $l=1$, atunci $A_1A_4 \leq \sqrt{5}$.



b) Analog se poate construi ΔA_5BA_1 dreptunghic cu $BA_1 \leq 2l$ şi $BA_5 \leq 2l$ şi $A_1A_5^2 \leq 4l^2+4l^2=8l^2$, adică $A_1A_5 \leq 2\sqrt{2}l$. În cazul $l=1$ avem $A_1A_5 \leq 2\sqrt{2}$.

c) Dacă punctele A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sunt în acelaşi plan şi îndeplinesc condiţiile din ipoteză atunci putem avea egalităţile $AA=\sqrt{5}$ şi $A_1A_5=2\sqrt{2}$, dacă segmentele: $[A_1A_2],[A_2A_3],[A_3A_4],[A_4A_5]$ sunt orientate în acelaşi sens.

5. 

a) Dreapta MN este perpendiculară pe π dacă este perpendiculară pe două drepte concurente din plan. Construim MM'' ll AD cu $MM' \subset (ADA')$, apoi $ME \perp MN$ cu $ME \subset (ABB')$. Atunci din faptul că $AD \perp (ABB')$ și $MN \subset (ABB')$ rezultă că $MN \perp AD$ de unde $MN \perp MM'$. Dreptele MM' și ME determină planul $(MM'E)=\pi$ cu proprietatea că $\pi \perp MN$. Dovedim

că $E \in (A'B')$. Dacă E=B' atunci $B'M^2 = \ell^2 + \left(\frac{3\ell}{4}\right)^2 = \frac{25\ell^2}{16}$,

$MN^2 = AM^2 + AN^2 = \left(\frac{\ell}{4}\right)^2 + AN^2$. Cum $\Delta B'MN$ este drep-

tunghic în M avem $B'N^2 = \frac{25\ell^2}{16} + \frac{\ell^2}{16} + AN^2 = \frac{26\ell^2}{16} + AN^2$.

Din triunghiul NBB', dreptunghic în B avem

$B'N^2 = \ell^2 + (\ell - AN)^2$ de unde rezultă:

$\frac{26\ell^2}{16} + AN^2 = 2\ell^2 - 2\ell \cdot AN + AN^2$, adică $AN=\frac{3\ell}{16}$.

Cum $AN>\frac{3\ell}{16}$, atunci $E \in (A'B')$.

Deci planul π taie muchiile (A'B'), (D'D) și (D'C').

Dacă $\pi' \perp MN$ rezultă că MN este perpendiculară pe două drepte concurente conținute în π'. Fie $NN' \perp AB$, $NN' \perp (ABC)$.

Cum $BC \perp (ABC)$ și BC ll NN' rezultă că $NN' \perp MN$.

Apoi construim $NF \perp MN$, $NF \subset (ABB')$.

Dar NN' și NF sunt două drepte concurente ce determină tocmai planul $\pi' \perp MN$. El taie muchiile (BB'), (CC'), (DC).

b) Dacă P este punctul de intersecție al planului π cu muchia (C'D') atunci $MN \perp \pi$, $MP \subset \pi$ și rezultă că ΔPMN este dreptunghic cu $m(\sphericalangle PMN)=90^0$.

Deoarece planele π și π' nu se intersectează cu muchia (BC), punctul P pentru care triunghiul MNP este dreptunghic nu poate fi situat pe (BC).

EDIȚIA a VIII-a, LUGOJ - 1994

CLASA a IX-a

1. Determinați toate funcțiile $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ pentru care $f(4x+6y)=4f(x)+6f(y)$, $(\forall)x,y\in\mathbf{N}$.
2. Găsiți valoarea minimă a expresiei:

   $$E=\frac{x}{y}+\frac{z}{t},\ \text{dacă } 1\le x\le y\le z\le t\le 1994.$$
3. Fie P un punct în interiorul paralelogramului ABCD astfel încât $\sphericalangle APB$ și $\sphericalangle CPD$ sunt suplementare. Demonstrați că $PA\cdot PC+PB\cdot PD=AB\cdot BC$.
4. Fie A',B',C' picioarele bisectoarelor interioare ale unghiurilor triunghiului ABC. Demonstrați că dacă triunghiul $A'B'C'$ este dreptunghic, atunci unul din unghiurile triunghiului ABC este de 120^0.

CLASA a X-a

1. Să se găsească o funcție $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$ care îndeplinește condițiile:
   a) $f(2)=2$
   b) $f(n+1)=1+f(1)+2f(2)+\ldots+nf(n)$, $(\forall)n\in\mathbf{N}^*$.
2. Fie $x,y\in\mathbf{R}^*$ astfel încât

   $$x+\frac{1}{x}\in\mathbf{Z},\quad y+\frac{1}{y}\in\mathbf{Z},\quad xy+\frac{1}{xy}\in\mathbf{Z}.$$

   Să se arate că $(\forall)$ $m,n\in\mathbf{Z}$ avem: $x^ny^m+\dfrac{1}{x^ny^m}\in\mathbf{Z}$.
3. Fie șirul de numere naturale definite în modul următor:

   linia 1: C_n^n

linia 2: C_{n+1}^{n}, C_{n+2}^{n}

linia3: $C_{n+3}^{n}, C_{n+4}^{n}, C_{n+5}^{n}$

. . . .

Să se calculeze suma elementelor liniei a „m"-a unde $n, m \in \mathbf{N}^*$.

4. Să se demonstreze că patrulaterul convex ABCD este dreptunghi dacă și numai dacă

$$\sigma(ABCD) = \frac{1}{4}(AB + CD)(AD + BC).$$

5. Fie SABCD o piramidă cu baza un paralelogram.

Arătați că:

a) Dacă punctele M, N, P aparțin laturilor paralelogramului ABCD atunci:

$v(SMNP) \le \frac{1}{2} v(SABCD)$. În ce caz are loc egalitatea?

b) Dacă A', B', C', D' sunt punctele de intersecție ale unui plan cu semidreptele (SA, (SB, (SC, (SD atunci:

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}.$$

SOLUȚII
EDIȚIA a VIII-a 1994 LUGOJ

CLASA a IX-a

1. Fie f o funcție care satisface condiția din enunț. Pentru x=y=0 găsim f(0)=0. Dacă x=0, respectiv y=0 obținem f(4x)=4f(x) și f(6y)=6f(y), (∀) x,y∈**N**.
   Punând x=3 și y arbitrar obținem:
   f(6y+12)=6f(y+2)=6f(y)+4f(3), de unde
   f(3)=3k cu k∈**N** și f(y+2)=f(y)+2k,(∀)y∈**N**.
   Pentru y=4 avem 6f(1)=f(6)=f(4+2)=f(4)+2k=4f(1)+2k, deci k=f(1).
   Analog , punând y=2 și x arbitrar găsim:
   f(12+4x)=6f(2)+4f(x)=4f(x+3) și în final f(x+3)=f(x)+3f(x).
   Deci f(x+3)=f(x+1)+2f(1)=f(x)+3f(1) și f(x+1)=f(x)+f(1) (∀)x∈**N**.
   Adunând termen cu termen egalitățile:
   f(x)=f(x-1)+f(1)
   f(x-1)=f(x-2)+f(1)
   ....
   f(2)=f(1)+f(1)
   f(1)=0+f(1)
   deducem că f(x)=xf(1), adică f este de forma:
   f(x)=kx cu k∈**N**.
   Se verifică ușor, acum, că toate aceste funcții satisfac condiția din enunț.
2. O fracție are valoare minimă când numărătorul este minim sau numitorul este maxim. Rezultă că x=1 și t=1994.

   Atunci, avem $E=\frac{1}{y}+\frac{z}{1994}$ cu $1\leq y\leq z\leq 1994$.

   Folosind inegalitatea mediilor avem:

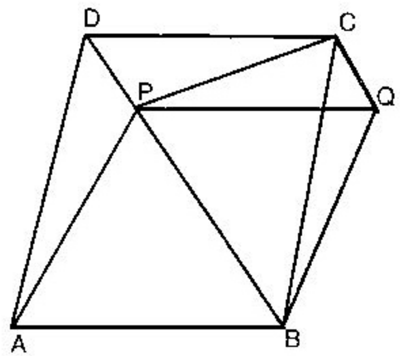
   $E\geq 2\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{1}{1994}}\geq 2\sqrt{\frac{1}{1994}}$ deoarece $\frac{z}{y}\geq 1$.

Deci $E_{min}=\frac{2}{\sqrt{1994}}$ și se realizează pentru $\frac{1}{y}=\frac{z}{1994}$ cu y=z.

Din yz=1994 și y=z obținem $y=z=\sqrt{1994}$.

În concluzie valoarea minimă este $\frac{2}{\sqrt{1994}}$ și se realizează

pentru x=1, $y=z=\sqrt{1994}$ și t= 1994.

3. 

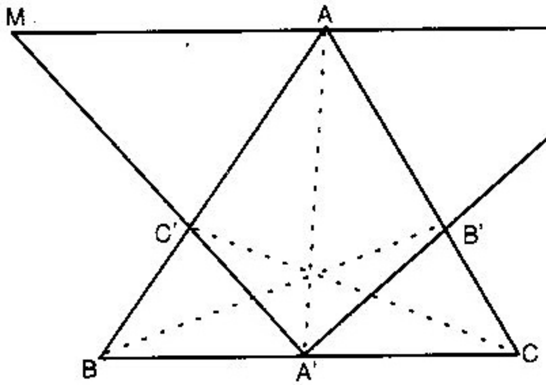
Construim BQ II AP și CQ II DP. Atunci triunghiurile APD și BQC au [AD]≡[BC] și ∢ADP≡∢BCQ, ∢DAP≡∢CBQ ca unghiuri cu laturile paralele.
Rezultă că ΔADP≡ΔBCQ și [AP]≡[BQ]. Cum AP II BQ obținem că patrulaterul ABQP este un paralelogram și [AB]≡[PQ].
Din faptul că m(∢APB)+m(∢CPD)=180° rezultă că m(∢APD)+m(∢BPC)=180° .
Din congruența triunghiurilor APD și BQC obținem m(∢APD)=m(∢BQC), de unde m(∢BQC)+m(∢BPC)=180° .
Din congruența triunghiurilor APD și BQC obținem m(∢APD)=m(∢BQC), de unde m(∢BQC)+m(∢BPC)=180° și patrulaterul BPCQ este inscriptibil. Folosind teorema lui Ptolemeu avem:

QB·PC+BP·QC=PQ·BC.

Cum QB=PA, QC=PD și PQ=AB obținem

PA·PC+PB·PD=AB·BC c.c.t.d.

4. Ducem prin A paralela la BC și notăm cu M și N intersecțiile acesteia cu A'C' și A'B'.



Din asemănarea triunghiurilor A'B'C și NB'A rezultă

$\frac{B'C}{B'A}=\frac{A'C}{AN}$ (1), iar din asemănarea triunghiurilor AC'M și BC'A' obținem:

$\frac{AC'}{C'B}=\frac{AM}{BA'}$ (2). Aplicând teorema lui Ceva în triunghiul ABC

avem $\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}=1$ sau folosind (1) și (2) avem:

$\frac{A'C}{AN}\cdot\frac{AM}{BA'}\cdot\frac{BA'}{A'C}=1$ de unde AM=AN și A'A este mediană în triunghiul MA'N. Deci $C'A'\perp B'A' \Leftrightarrow AA'=AN$.

Din (1) și teorema bisectoarei obținem:

$$AN=\frac{B'A}{B'C}A'C=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC\cdot AC}{AB+AC}=\frac{AB\cdot AC}{AB+AC}$$

Din AA' bisectoare rezultă $AA'=\frac{2AB\cdot AC}{AB+AC}\cos\frac{A}{2}$

de unde AA'=AN $\Rightarrow\frac{AB\cdot AC}{AB+AC}=\frac{2AB\cdot AC}{AB+AC}\cos\frac{A}{2}$ **și**

$\mathbf{C'A'\perp B'A' \Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow m(\sphericalangle A)=120^\circ}$.

CLASA a X-a

1. Dând lui n valorile 1,2,...,n-1 obținem succesiv
   f(2)=1+f(1) de unde f(1)=1, deoarece f(2)=2
   $f(3)=1+f(1)+2f(2)=1+1+2\cdot 2=6=3!$
   $f(4)=1+f(1)+2f(2)+3f(3)=1+1+2\cdot 2+3\cdot 6=24=4!$
   ....
   $f(n)=1+f(1)+2f(2)+...+(n-1)f(n-1)=n!$
   Prin inducție matematică arătăm că f(n)=n! pentru $(\forall)n\in\mathbf{N}^*$.
   Verificarea este imediată deoarece f(1)=1, adevărat.
   $P(k)\Rightarrow P(k+1)$
   P(k): f(k)=k!
   P(k+1): f(k+1)=(k+1)!
   $f(k+1)=1+f(1)+2f(2)+...+kf(k)=$
   $=1+f(1)+2f(2)+...(k-1)f(k-1)+kf(k)=$
   $=f(k)+kf(k)=(k+1)f(k)=(k+1)k!=(k+1)!$
   Deci $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$, f(n)=n! pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$.
2. Este suficient să demonstrăm proprietatea pentru $(\forall)$ $m,n\in\mathbf{N}$, deoarece pentru $m,n\in\mathbf{Z}\_$ expresia:

   $x^ny^m+\frac{1}{x^ny^m}$ devine $\frac{1}{x^{-n}y^{-m}}+x^{-n}y^{-m}$ cu (-n), (-m)$\in\mathbf{N}$.

   Demonstrăm prin inducție matematică faptul că

   $x^ny^m+\frac{1}{x^ny^m}\in\mathbf{Z}$ pentru $x+\frac{1}{x}\in\mathbf{Z}, y+\frac{1}{y}\in\mathbf{Z}, xy+\frac{1}{xy}\in\mathbf{Z}$.

   Fixăm pe m și demonstrăm prin inducție după $n\in\mathbf{N}$.

   Verificare: P(0,m): $y^m+\frac{1}{y^m}\in\mathbf{Z}$ pentru $(\forall)$ $m\in\mathbf{N}$.

   Demonstrăm la rândul ei prin inducție matematică după m

   că $y^m+\frac{1}{y^m}\in\mathbf{Z}$ pentru $(\forall)$ $m\in\mathbf{N}^*$.

   P(0,1): $y+\frac{1}{y}\in\mathbf{Z}$, adevărat. Arătăm că implicația

   $P(0,m)\Rightarrow P(0,m+1)$ este adevărată adică $y^m+\frac{1}{y^m}\in\mathbf{Z}$

implică $y^{m+1}+\frac{1}{y^{m+1}}\in \mathbf{Z}$.

Cum și $y+\frac{1}{y}\in \mathbf{Z}$ atunci

$$\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(y^m+\frac{1}{y^m}\right)=y^{m+1}+\frac{1}{y^{m+1}}+y^{m-1}+\frac{1}{y^{m-1}}.$$

Cum $y^m+\frac{1}{y^m}\in \mathbf{Z}$ avem și $y^{m-1}+\frac{1}{y^{m-1}}\in \mathbf{Z}$ și de aici rezultă că $y^{m+1}+\frac{1}{y^{m+1}}\in \mathbf{Z}$ și implicația este adevărată.

Demonstrație: $P(n,m)\Rightarrow P(n+1,m)$, adică $x^ny^m+\frac{1}{x^ny^m}\in \mathbf{Z}\Rightarrow$

$x^{n+1}y^m+\frac{1}{x^{n+1}y^m}\in \mathbf{Z}$.

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^ny^m+\frac{1}{x^ny^m}\right)=x^{n+1}y^m+\frac{1}{x^{n+1}y^m}+x^{n-1}y^m+\frac{1}{x^{n-1}y^m}.$$

Cum $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^ny^m+\frac{1}{x^ny^m}\right)\in \mathbf{Z}$ și $x^{n-1}y^m+\frac{1}{x^{n-1}y^m}\in \mathbf{Z}$

obținem $x^{n+1}y^m+\frac{1}{x^{n+1}y^m}\in \mathbf{Z}$ și proprietatea este adevărată pentru $(\forall)$ $m,n\in \mathbf{N}$.

Ținând cont de precizarea făcută anterior proprietatea este adevărată $(\forall)$ $m,n\in \mathbf{Z}$.

3. Cum linia 1 are un element, linia 2 are două elemente, linia 3 are trei elemente, rezultă că linia m are m elemente.
Suma numărului de elemente din liniile 1,2,..., m-1 este
$1+2+\ldots+(m-1)=\frac{m(m-1)}{2}$. Atunci obținem:

linia m:

$C^n_{n+\frac{(m-1)m}{2}+1}, C^n_{n+\frac{(m-1)m}{2}+2},\ldots, C^n_{n+\frac{(m-1)m}{2}+m}$ și

$$S_m=C^n_{n+\frac{(m-1)m}{2}+1}+C^n_{n+\frac{(m-1)m}{2}+2}+\ldots+C^n_{n+\frac{(m-1)m}{2}+m}$$

$$=C^n_{n+1+\frac{(m-1)m}{2}}+C^n_{n+2+\frac{(m-1)m}{2}}+\ldots+C^n_{n+m+\frac{(m-1)m}{2}}.$$

Folosim egalitatea

$C^{k-1}_{n-1}=C^k_n-C^k_{n-1}$ și obținem

$C^{k-1}_{k-1}+C^{k-1}_{k}+\ldots+C^{k-1}_{n-2}+C^{k-1}_{n-1}=C^k_n$,

de unde:

$$C^n_{n+1+\frac{(m-1)m}{2}}+C^n_{n+2+\frac{(m-1)m}{2}}+\ldots+C^n_{n+m+\frac{(m-1)m}{2}}=$$

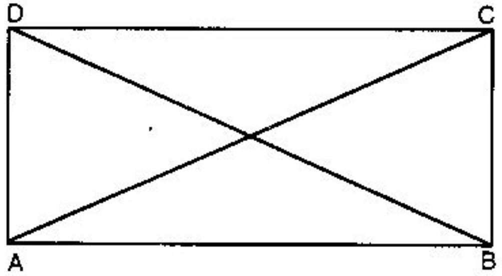
$$C^n_n+C^n_{n+1}+\ldots+C^n_{n+\frac{(m-1)m}{2}}+C^n_{n+1+\frac{(m-1)m}{2}}+C^n_{n+2+\frac{(m-1)m}{2}}+\ldots+$$

$$+C^n_{n+m+\frac{(m-1)m}{2}}-\left(C^n_n+C^n_{n+1}+\ldots+C^n_{n+\frac{(m-1)m}{2}}\right)=$$

$$=C^{n+1}_{n+m+1+\frac{(m-1)m}{2}}-C^{n+1}_{n+1+\frac{(m-1)m}{2}}.$$

Deci $S_m=C^{n+1}_{n+m+1+\frac{(m-1)m}{2}}-C^{n+1}_{n+1+\frac{(m-1)m}{2}}$.

4. Dacă ABCD este dreptunghi, atunci
$\sigma(ABCD)=AB\cdot BC=$
$$\frac{AB+CD}{2}\cdot\frac{AD+BC}{2}=\frac{1}{4}(AB+CD)\cdot(AD+BC).$$
Fie ABCD un patrulater convex oarecare.
Atunci avem:
$\sigma(ABCD)=$



$$=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B+\frac{1}{2}AD\cdot DC\sin D=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin A+\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin C$$

de unde $\sigma(ABCD)=$

$$=\frac{1}{4}(AB\cdot BC\sin B+AD\cdot DC\sin D+AB\cdot AD\sin A+BC\cdot CD\sin C).$$

Din ipoteză $\sigma(ABCD)=\frac{1}{4}(AB+CD)(AD+BC)$,

de unde obținem:

$AB\cdot AD+AB\cdot BC+AD\cdot CD+BC\cdot CD=$

$=AB\cdot AD\cdot\sin A+AB\cdot BC\cdot\sin B+AD\cdot CD\cdot\sin D+BC\cdot CD\cdot\sin C$ sau

$AB\cdot AD\cdot(1-\sin A)+AB\cdot BC\cdot(1-\sin B)+BC\cdot CD\cdot(1-\sin C)+$

$+AD\cdot CD\cdot(1-\sin D)=0$ (1) .

Dar $A,B,C,D\in(0,180^0)$ și $0<\sin A\leq1$; $0<\sin B\leq1$; $0<\sin C\leq1$; și $0<\sin D\leq1$; , de unde $1-\sin A\geq0$, $1-\sin B\geq0$, $1-\sin C\geq0$, $1-\sin D\geq0$,. Atunci din (1) obținem $\sin A=1$; $\sin B=1$; $\sin C=1$; $\sin D=1$ adică

$A=B=C=D=\frac{\pi}{2}$ și ABCD este dreptunghi.

5. a) Ținând cont de formula de calcul pentru volumul piramidei, avem:

$$v(SMNP)=\frac{1}{3}\sigma(MNP)\cdot SO;$$

$$v(SABCD)=\frac{1}{3}\sigma(ABCD)\cdot SO$$

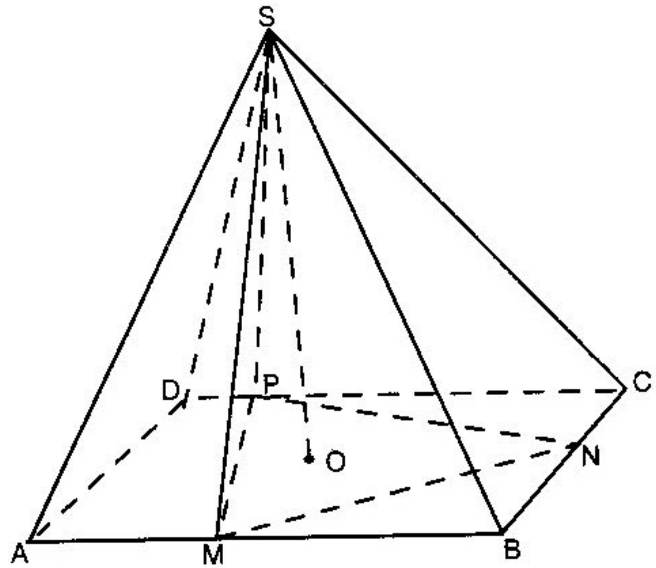
Folosind proprietatea că aria unui triunghi cu vârfurile pe

laturile unui paralelogram nu poate fi mai mare decât jumătatea ariei paralelogramului obținem:

$$\sigma(MNP)\leq\frac{1}{2}\sigma(ABCD)$$

de unde rezultă că

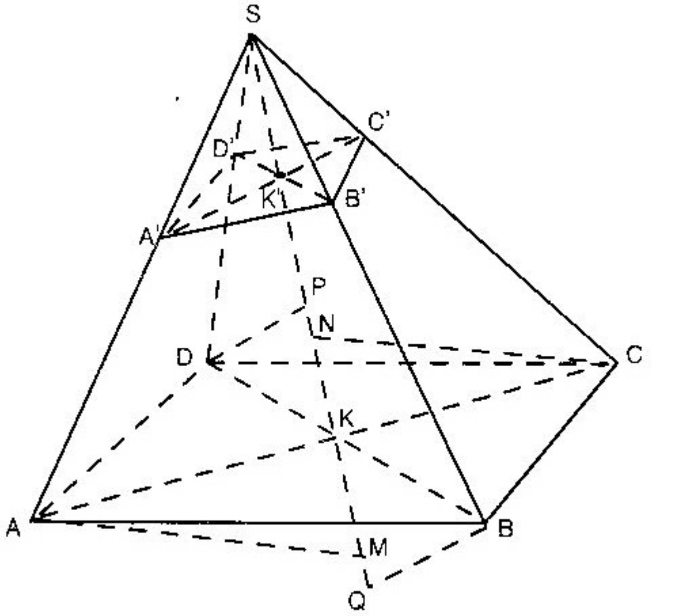
$$v(SMNP)\leq\frac{1}{2}v(SABCD).$$



b) Fie $AC\cap BD=\{K\}$ și
$A'C'\cap B'D'=\{K'\}$.
Punctele S,K,K' sunt coliniare.
Atunci avem:
$\sigma(SA'K')+\sigma(SC'K')=\sigma(SA'C')$
de unde

$$\frac{1}{2}SA'\cdot SK'\sin\alpha_1+\frac{1}{2}SC'\cdot SK'\sin\alpha_2=\frac{1}{2}SA'\cdot SC'\sin(\alpha_1+\alpha_2)\quad(1)$$

unde $\alpha_1=m(\sphericalangle ASK)$ și $\alpha_2=m(\sphericalangle CSK)$.



Proiectăm pe A în M și C în N pe dreapta SK.

Atunci $\sin\alpha_1=\frac{AM}{SA}$; $\cos\alpha_1=\frac{SM}{SA}$; $\sin\alpha_2=\frac{CN}{SC}$; $\cos\alpha_2=\frac{SN}{SC}$.
Din congruența triunghiurilor dreptunghice AMK și CNK obținem AM=CN și din (1) avem

$$SA'\cdot SK'\frac{AM}{SA}+SC'\cdot SK'\frac{CN}{SC}=SA'\cdot SC'\left(\frac{AM}{SA}\cdot\frac{SN}{SC}+\frac{CN}{SC}\cdot\frac{SM}{SA}\right)$$

sau $SK'\cdot AM\left(\frac{SA'}{SA}+\frac{SC'}{SC}\right)=SA'\cdot SC'\cdot AM\left(\frac{SN+SM}{SA\cdot SC}\right)$ (2)

Analog din $\sigma(SB'K')+\sigma(SD'K')=\sigma(SB'D')$ obținem

$$\frac{1}{2}SB'\cdot SK'\sin\beta_1+\frac{1}{2}SD'\cdot SK'\sin\beta_2=\frac{1}{2}SB'\cdot SD'\sin(\beta_1+\beta_2) \quad (3)$$

unde $\beta_1=m(<BSK)$ și $\beta_2=m(<DSK)$.
Proiectăm pe B în Q și pe D în P pe dreapta SK.

Atunci $\sin\beta_1=\frac{BQ}{BS}$, $\cos\beta_1=\frac{SQ}{SB}$, $\sin\beta_2=\frac{DP}{SD}$ și $\cos\beta_2=\frac{SP}{SD}$.
Din congruența triunghiurilor dreptunghice BQK și DPK obținem BQ=DP și din (3) avem

$$SB'\cdot SK'\frac{BQ}{SB}+SD'\cdot SK'\frac{DP}{SD}=SB'\cdot SD'\left(\frac{BQ}{SB}\cdot\frac{SP}{SD}+\frac{DP}{SD}\cdot\frac{SQ}{SB}\right)$$

de unde $SK'\cdot BQ\left(\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}\right)=SB'\cdot SD'\cdot BQ\cdot\frac{SP+SQ}{SB\cdot SD}$

sau $SK'\left(\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}\right)=SB'\cdot SD'\cdot\frac{SP+SQ}{SB\cdot SD}$ (4).

Apoi $\frac{SN+SM}{SK}=\frac{SK-NK+SK+KM}{SK}=2$

și $\frac{SP+SQ}{SK}=\frac{SK-PK+SK+KQ}{SK}=2$

deoarece NK=KM și PK=KQ din congruența triunghiurilor dreptunghice arătată anterior.
Din (2) și (4) avem

$$\frac{SK'}{SK}=\frac{2\frac{SA'}{SA}\cdot\frac{SC'}{SC}}{\frac{SA'}{SA}+\frac{SC'}{SC}}=\frac{2\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SD'}{SD}}{\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}}$$

de unde

$$\frac{\frac{SA'}{SA}+\frac{SC'}{SC}}{\frac{SA'}{SA}\cdot\frac{SC'}{SC}}=\frac{\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}}{\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SD'}{SD}}$$

sau

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$$

c.c.t.d.

EDIȚIA a VIII-a - LUGOJ - 1994

Clasa a XI-a

1. Fie $a_1 \in (0, 1)$ şi $a_{n+1} = a_n^3 - a_n^2 + 1$, $(\forall)\ n \geq 1$

(i) Studiaţi convergenţa şirului (a_n).

(ii) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n$.

* * *

2. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile în $x_0 = 6$ şi care verifică condiţia $\dfrac{f(x)}{2} + 3 = f\left(\dfrac{x}{2} + 3\right)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

* * *

3. Fie $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ şi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Arătaţi că dacă $a + d \notin \{-2\} \cup \cup \left\{ 2\cos\dfrac{2k\pi}{n} :\ k = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \right\}$, atunci $A^n \neq I_2$.

* * *

4. Fie $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Să se determine matricele $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ care verifică: $\det(A + BC) = (\det A) + CB$, pentru orice $B \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$ şi $C \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbf{R})$.

* * *

Clasa a XII-a

1. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\displaystyle\int_{\frac{1994}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}$.

* * *

2. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea că este integrabilă pe orice interval $[c, d] \subset \mathbf{R}$. Fie $x_0 \in \mathbf{R}$; dacă limita : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0)}{h}$ există şi este finită, vom spune că f este x – derivabilă în x_0 şi vom nota această

limită cu $f^x(x_0)$.

a) Să se arate că dacă f este derivabilă în x_0, atunci f este x – derivabilă în x_0 şi $f'(x_0) = f^x(x_0)$.

b) Determinaţi $A \subset \mathbf{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus A \end{cases}$ să fie x – derivabilă în $x_0 = 0$ şi să nu fie derivabilă în x_0.

* * *

3. Pe mulţimea $A = \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3$ sunt definite două operaţii $\boxplus$ şi $\boxdot$ astfel încât :

a) $(u, v) \boxplus (x, y) = (u + x, v + y)$

b) $(A, \boxplus, \boxdot)$ este inel izomorf cu inelul claselor de resturi $\mathbf{Z}_9$.

c) $(1, 0)$ este element neutru faţă de $\boxdot$.

Să se determine elementele inversabile ale lui A şi să se determine operaţia $\boxdot$.

* * *

4. Fie z un număr întreg pozitiv. Dacă $a, b \in \mathbf{R}$ atunci vom nota:

$$a \textcircled{z} b = \left(a^z + b^z\right)^{\frac{1}{z}}, \quad a * b = ab$$

a) Să se determine intervalele de forma $[h, +\infty)$ care sunt părţi stabile ale lui $\mathbf{R}$ faţă de $\textcircled{z}$.

b) Să se precizeze valorile lui z pentru care $(\mathbf{R}_+^*, *)$ şi $(\mathbf{R}, \textcircled{z})$ sunt izomorfe.

c) Să se definească o operaţie $\circ$ pe $\mathbf{R}_+^*$ astfel încât $(\mathbf{R}_+^*, *, \circ)$ şi $(\mathbf{R}, \textcircled{z}, *)$ să fie corpuri izomorfe.

* * *

EDIŢIA a VIII-a - LUGOJ - 1994

Clasa a XI-a

1. i) Din $a_1 \in (0, 1)$ rezultă $a_2 = a_1^3 - a_1^2 + 1 = a_1^2(a_1 - 1) + 1$.

Cum $a_1^2 \in (0, 1)$, $a_1 - 1 \in (-1, 0) \Rightarrow a_1^2(a_1 - 1) \in (-1, 0)$ şi $a_1^2(a_1 - 1) + 1 = a_2 \in (0, 1)$. Intuim că $a_{n+1} \in (0, 1)$ pentru $(\forall)\ n \geq 1$. Demonstrăm proprietatea prin inducţie completă. Fie $P(n) : a_n \in (0, 1), (\forall)\ n \geq 1$.

Verificare: $P(1) : a_1 \in (0, 1)$ adevărat

Demonstraţie

$P(k) : a_k \in (0, 1)$

$P(k + 1) : a_{k+1} \in (0, 1)\quad k \geq 1$

$P(k) \Rightarrow P(k + 1)$

$a_{k+1} = a_k^3 - a_k^2 + 1 = a_k^2(a_k - 1) + 1$

$a_k \in (0, 1) \Rightarrow (a_k - 1) \in (-1, 0)$

$a_k \in (0, 1) \Rightarrow a_k^2 \in (0, 1) \Rightarrow a_k^2(a_k - 1) \in (-1, 0) \Rightarrow a_k^2(a_k - 1) + 1 \in (0, 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(k + 1)$ adevărat $\Rightarrow P(n)$ adevărat pentru $(\forall)\ n \geq 1$.

Studiem în continuare monotonia şirului.

$a_{n+1} - a_n = a_n^3 - a_n^2 - a_n + 1 = (a_n - 1)^2(a_n + 1) > 0$, $(\forall)\ n \geq 1$ deoarece $a_n \in (0, 1) \Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$, $(\forall)\ n \geq 1$.

În concluzie, şirul (a_n) este strict crescător şi mărginit $\Rightarrow (a_n)$ este convergent şi $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^3 - a_n^2 + 1\right) \Rightarrow 2 = \ell^3 - \ell^2 + 1 \Rightarrow (\ell - 1)^2(\ell + 1) = 0 \Rightarrow \ell = 1$.

ii) Din relaţia de recurenţă obţinem: $a_{n+1} - 1 = a_n^2(a_n - 1)$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$

Particularizând pentru $n = 1, 2 \cdots$ şi înmulţind relaţiile obţinute, membru cu membru, se obţine: $a_{n+1} - 1 = (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^2(a_1 - 1)$

de unde $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^2 = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1} - 1}{a_1 - 1} = 0$ adică $\lim\limits_{n\to\infty} a_1 a_2 \cdots a_n = 0$.

$$\text{Apoi } \lim_{n\to\infty} a_n^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left[1 + (a_n - 1)\right]^{\frac{1}{a_n - 1}}\right\}^{n(a_n - 1)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - 1)}.$$

Fie $b_n = n(a_n - 1)$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$. Din $a_n \in (0, 1) \Rightarrow a_n^n \in (0, 1)$, deci $(b_n)_{n \geq 1}$ este mărginit. Atunci:

$$b_{n+1} - b_n = (n+1)(a_{n+1} - 1) - n(a_n - 1) = (a_n - 1)\left[(n+1)a_n^2 - n\right] > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow b_{n+1} - b_n > 0 \Rightarrow b_{n+1} > b_n$ $(\forall)$ $n \geq 1 \Rightarrow b_n$ este strict crescător.

În final obținem că b_n este convergent, deci $(\exists)$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbf{R}$.

Folosind lema lui Stolz-Cèsaro obținem:

$$b = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^3 - a_n^2 - a_n + 1}{-\frac{1}{n(n+1)}} =$$

$$= -\lim_{n\to\infty} n(n+1)(a_n - 1)^2(a_n + 1) = -\lim_{n\to\infty} [n(a_n - 1)]^2 \cdot \lim_{n\to\infty} (a_n + 1) \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = -2b^2 \Rightarrow b + 2b^2 = 0 \Rightarrow b \in \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}.$$

Dar $b \neq 0$ și atunci $b = -\frac{1}{2}$. În final $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

2. Fie $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = f(x) - x$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$.

Cum f este derivabilă în $x_0 = 6$ rezultă că și h este derivabilă în $x_0 = 6$.

În acest caz relația din enunț devine: $\frac{h(x)}{2} = h\left(\frac{x}{2} + 3\right)$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$ (1)

Înlocuind pe x pe rând cu: $\frac{x}{2} + 3$; $\frac{x}{2^2} + \frac{3}{2} + 3$; $\ldots, \frac{x}{2^{n-1}} + \frac{3}{2^{n-2}} + \cdots + 3$

în relația (1), apoi înmulțind membru cu membru avem:

$$\frac{h(x)}{2} = h\left(\frac{x}{2} + 3\right)$$

$$\frac{h\left(\frac{x}{2} + 3\right)}{2} = h\left(\frac{x}{2^2} + \frac{3}{2} + 3\right)$$

$$\frac{h\left(\frac{x}{2^2} + \frac{3}{2} + 3\right)}{2} = h\left(\frac{x}{2^3} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2} + 3\right)$$

....

$$\frac{h\left(\frac{x}{2^{n-1}} + \frac{3}{2^{n-2}} + \cdots + \frac{3}{2} + 3\right)}{2} = h\left(\frac{x}{2^n} + \frac{3}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{3}{2} + 3\right), \text{ de unde}$$

$$h(x) = 2^n h\left[\frac{x}{2^n} + 3\left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right)\right] = 2^n h\left(\frac{x}{2^n} + 3\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}\right) =$$

$$= 2^n h\left(\frac{x}{2^n} + 6\frac{2^n - 1}{2^n}\right) \Rightarrow h(x) = 2^n h\left[6 + \frac{1}{2^n}(x - 6)\right].$$

Din (1) avem $\frac{h(6)}{2} = h(6) \Rightarrow h(6) = 0$.

$$\text{Deci } h(x) = (x-6) \cdot \frac{h\left[6 + \frac{1}{2^n}(x-6)\right] - h(6)}{\frac{1}{2^n}(x-6)}, (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*, (\forall)\ x \in \mathbf{R} - \{6\}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}(x-6) = 0$, iar h este derivabilă în $x = 6$, prin trecere la limită avem $h(x) = (x - 6)\, h'(x)$.

Notând $h'(6) = k \in \mathbf{R}$ avem $h(x) = k(x - 6)$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$ adică, în final, $f(x) = (k + 1)x - 6k$, $k \in \mathbf{R}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, funcția care verifică ipoteza problemei.

3. Matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ verifică relația:

$A^2 + (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$.

Presupunem că există $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $A^n = I_2$ de unde

$\det(A^n) = 1 \Rightarrow (\det A)^n = 1 \Rightarrow \det A = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ cu $k = \overline{0, n-1}$.

Dar $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ și atunci $\det A \in \mathbf{R} \Rightarrow \det A = \pm 1$ dacă n este par sau $\det A = 1$ dacă n este impar.

Caz I. Fie $\det A = 1$ și polinoamele $f = X^2 - (a + d)X + (ad - bc) = X^2 - (a + d)X + 1 \in \mathbf{R}[X]$, respectiv $g = X^n - 1 \in \mathbf{R}[X]$. Cum $\Delta_f = (a + d)^2 - 4 > 0$ pentru $a + d \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \Rightarrow f$ are două rădăcini reale α_1 și α_2. Din $a + d \in \{-2, 2\} \Rightarrow \alpha_i \neq \pm 1$ cu $i = 1, 2$.

Apoi $g = X^n - 1$ admite eventual, ca rădăcini reale, pe ± 1 și $(X - \alpha_1, g) = 1$, $(X - \alpha_2, g) = 1$, adică $((X - \alpha_1)(X - \alpha_2), g) = 1$, de unde $(f, g) = 1$. În acest caz $(\exists)$ $f_1, g_1 \in \mathbf{R}[X]$ astfel încât $f_1 \cdot f + g_1 \cdot g = 1$, de unde $f_1(A)f(A) + g_1(A)g(A) = I_2$. Dar $f(A) = g(A) = O_2 \Rightarrow O_2 = I_2$ imposibil.

Pentru $a + d \in (-2, 2) \setminus \left\{2\cos\frac{2k\pi}{n} \middle| k = 1, 2, \cdots, n-1\right\}$ avem $\Delta_f < 0$ şi f admite două rădăcini complexe.

Cum g are ca rădăcini complexe pe $\beta_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, cu $k = 1, 2, \cdots, n-1 \Rightarrow f(\beta_k) \neq 0$ şi $(f, X - \beta_1) = 1$; $(f, X - \beta_2) = 1$; $\cdots$,$(f, X - \beta_k) = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow (f, (X-\beta_1)(X-\beta_2)\cdots(X-\beta_k)) = 1 \Rightarrow (f, g) = 1$ şi $(\exists)$ $f_1, g_1 \in \mathbf{R}[X]$ astfel încât $f_1 \cdot f + g_1 \cdot g = 1 \Rightarrow f_1(A)\, f(A) + g_1(A)\, g(A) = I_2 \Rightarrow O_2 = I_2$, contradicţie.

Caz II. Dacă $\det A = -1$, considerăm polinoamele $f = X^2 - (a+d)X - 1 \in \mathbf{R}[X]$ şi $g = X^n - 1 \in \mathbf{R}[X]$ şi se face acelaşi raţionament ca în cazul I.

4. Din $B \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$ şi $C \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbf{R})$ avem

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \text{ şi } C = (c_{11}, c_{12} \cdots c_{1n}) \text{ avem } B \cdot C = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \cdot (c_{11}, c_{12} \cdots c_{1n}) =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}c_{11} & b_{11}c_{12} & \cdots & b_{11}c_{1n} \\ b_{21}c_{11} & b_{21}c_{12} & \cdots & b_{21}c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1}c_{11} & b_{n1}c_{12} & \cdots & b_{n1}c_{1n} \end{pmatrix} \text{ şi } C \cdot B = (c_{11}, c_{12} \cdots c_{1n}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} =$$

$$= (c_{11}b_{11} + c_{12}b_{21} + \cdots + c_{1n}b_{n1}). \qquad \text{Fie } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dacă în matricea B alegem $b_{i1} = 1$ şi $b_{j1} = 0$, $(\forall)$ $j \neq i$ cu $i, j = \overline{1, n}$ iar în matricea C alegem $c_{1j} = 1$ şi $c_{1i} = 0$ $(\forall)$ $i \neq j$ cu $i, j = \overline{1, n}$, obţinem:

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{i1}c_{1j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ şi } CB = 0.$$

În acest caz relaţia din enunţ devine

$$\det(A + BC) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Dezvoltând determinantul din stânga egalităţii (1) după linia i relaţia de mai sus devine

$$(a_i\, \delta_{i1} + a_{i2}\, \delta_{i2} + \cdots + a_{in}\, \delta_{in}) + \delta_{ij} = \det A,$$

de unde $\det A + \delta_{ij} = \det A \Rightarrow \delta_{ij} = 0$.

Cum i şi j au fost aleşi la întâmplare, rezultă că $\delta_{ij} = 0$, $(\forall)$ $i, j = \overline{1, n}$, deci toţi complemenţii algebrici din matricea A sunt nuli, adică $A^* = O_n$, $A \neq O_n$.

Clasa a XII-a

1. Se ştie că pentru funcţia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, continuă avem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{a \le x \le b} |f(x)| > 0.$$

Notăm $I_n = \left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}}$. Atunci $I_n \le \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| (b-a)^{\frac{1}{n}}$.

Fie acum $M \in \left(0, \sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\right)$; există atunci $x_0 \in [a, b]$ a. î. $|f(x_0)| > M$.

Cum f este continuă, există un subinterval nedegenerat $[c, d] \subset [a, b]$ pe care $\sup\limits_{x\in[c,d]}|f(x)| \geq M$. Rezultă că $\int_a^b |f(x)|^n dx \geq \int_c^d |f(x)|^n dx \geq M^n(d-c)$ şi cum M a fost ales arbitrar în $\left(0, \sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\right)$, conchidem că:

$$I_n \geq \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\cdot(d-c)^{\frac{1}{n}}.$$

Trecând la limită în inegalităţile obţinute mai sus pentru I_n, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

În cazul de faţă pentru funcţia $f : \left[\frac{1994}{n}, \frac{\pi}{2}\right] \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$,

determinăm $\sup\limits_{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]}|f(x)| = \sup\limits_{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]}\frac{\sin x}{x}$.

Atunci $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ şi considerăm $g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$.

$g(x) = x\cos x - \sin x$, de unde $g(x) = -x\sin x < 0$, $(\forall)\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Fie

x	0	$\frac{\pi}{2}$
g'	0 – – – – – – – – – – – –	
g	0 ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘	-1

şi

x	0	$\frac{1994}{n}$	$\frac{\pi}{2}$
f'		– – – – – – – – – – – – – – – –	
f		1 ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘	$\frac{2}{\pi}$

De unde: $\sup\limits_{x\in\left[\frac{1994}{n},\frac{\pi}{2}\right]}\frac{\sin x}{x} = \frac{n}{1994}\cdot\sin\frac{1994}{n}$.

În acest caz $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_{\frac{1994}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx\right)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1994}{n}}{\frac{1994}{n}} = 1$ deoarece notând cu $y = \frac{1994}{n}$ avem $y \to 0$ pentru $n \to \infty$ şi $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$.

2. Dacă f este derivabilă pe **R**, atunci

$\lim\limits_{t\to x_0}\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0} = f'(x_0) \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ \delta > 0$ astfel încât $|t-x_0| < \delta \Rightarrow$

$$\left|\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon \Rightarrow f'(x_0) - \varepsilon < \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0} < f'(x_0)+\varepsilon.$$

Notând $t - x_0 = h > 0 \Rightarrow t = x_0 + h$. Pentru $h > 0$ obţinem:

$$h(f'(x_0) - \varepsilon) < f(t) - f(x_0) < h(f'(x_0) + \varepsilon) \Rightarrow \int_{x_0}^{x_0+h} h(f'(x_0)-\varepsilon)dt <$$

$$< \int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))dt < \int_{x_0}^{x_0+h} h(f'(x_0)+\varepsilon)dt \Rightarrow h^2(f'(x_0)-\varepsilon) <$$

$$< \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - hf(x_0) < h^2(f'(x_0)+\varepsilon) \Rightarrow f'(x_0)-\varepsilon < \frac{1}{h^2}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \frac{1}{h}f(x_0) < f'(x_0)+\varepsilon$$

$$\Rightarrow f'(x_0) - \varepsilon < \frac{\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0)}{h} < f'(x_0)+\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to h\\ h>0}}\frac{\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$ Analog pentru $h < 0$.

(Am folosit faptul că f este integrabilă pe orice interval $[c, d] \subset \mathbf{R}$)

4. a) $a \circledz b = \left(a^z + b^z\right)^{\frac{1}{z}}$ cu $a, b \in \mathbf{R}$ şi $z \in \mathbf{Z}_+^*$.

Intervalele $[h, +\infty)$ sunt părţi stabile ale lui **R** faţă de ⓩ dacă $(\forall)$ a, b $\in [h, +\infty) \Rightarrow a \circledz b \in [h, +\infty)$.

Pentru a, b < 0 $\Rightarrow \left(a^z + b^z\right)^{\frac{1}{z}} < 0$ pentru z impar şi $\left(a^z + b^z\right)^{\frac{1}{z}} > 0$ pentru z-par. Deci a, b < 0 - imposibil.

Pentru $(\forall)$ a, b $\geq 0 \Rightarrow \left(a^z + b^z\right)^{\frac{1}{z}} > 0 \Rightarrow \left(a^z + b^z\right)^{\frac{1}{z}} \in [0, \infty)$. Deci intervalele $[h, \infty) \subset [0, +\infty)$ sunt părţi stabile ale lui **R** faţă de legea ⓩ.

b) Pentru z – impar (**R**, ⓩ) este grup comutativ. Într-adevăr:

G_1. $(a \circledz b) \circledz c = a \circledz (b \circledz c)$ $(\forall)$ a, b, c $\in$ **R**.

$$(a \circledz b) \circledz c = \left[(a \circledz b)^z + c^z\right]^{\frac{1}{z}} = \left[\left(\left(a^z + b^z\right)^{\frac{1}{z}}\right)^z + c^z\right]^{\frac{1}{z}} = \left(a^z + b^z + c^z\right)^{\frac{1}{z}}.$$

$$a \circledz (b \circledz c) = \left[a^z + (b \circledz c)^z\right]^{\frac{1}{z}} = \left[a^z + \left(\left(b^z + c^z\right)^{\frac{1}{z}}\right)^z\right]^{\frac{1}{z}} = \left(a^z + b^z + c^z\right)^{\frac{1}{z}}.$$

G_2. $(\exists)$ e $\in$ **R** a. î. $a \circledz e = e \circledz a = a$ $(\forall)$ a $\in$ **R**.

$a \circledz e = \left(a^z + e^z\right)^{\frac{1}{z}} = a \Leftrightarrow a^z + e^z = a^z \Leftrightarrow e^z = 0 \Leftrightarrow e = 0$.

G_3. $(\forall)$ a $\in$ **R**, $(\exists)$ a' $\in$ **R** a. î. $a \circledz a' = a' \circledz a = 0$

$a \circledz a' = \left(a^z + a'^z\right)^{\frac{1}{z}} = 0 \Leftrightarrow a^z + a'^z = 0 \Leftrightarrow a'^z = -a^z \Leftrightarrow a'^z = (-a)^z \Leftrightarrow a' = -a$, deoarece z este impar.

G_4. $a \circledz b = b \circledz a$, $(\forall)$ a, b $\in$ **R**.

$b \circledz a = \left(b^z + a^z\right)^{\frac{1}{z}} = \left(a^z + b^z\right)^{\frac{1}{z}} = a \circledz b$.

b) $\left(\mathbf{R}_+^*, *\right) \simeq (\mathbf{R}, ⓩ)$ dacă există $f: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ cu proprietăţile:

i) f – bijectivă pe $\mathbf{R}_+^*$

ii) $f(a * b) = f(a) \circledz f(b)$, $(\forall)$ a, b $\in \mathbf{R}_+^*$.

i) Luând $f: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt[z]{\lg x}$ este bijectivă pentru z impar.

ii) $f(a * b) = f(ab) = \sqrt[z]{\lg ab} = \sqrt[z]{\lg a + \lg b}$

$f(a) \circledz f(b) = \left(f^z(a) + f^z(b)\right)^{\frac{1}{z}} = \left[\left(\sqrt[z]{\lg a}\right)^z + \left(\sqrt[z]{\lg b}\right)^z\right]^{\frac{1}{z}} = (\lg a + \lg b)^{\frac{1}{z}} =$

$= \sqrt[z]{\lg a + \lg b}$

c) $(\mathbf{R}_+^*, *, \circ) \simeq (\mathbf{R}, ⓩ, *)$ dacă există $f: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ cu proprietăţile:

i) f bijectivă

ii) $f(x * y) = f(x) \circledz f(y)$

$f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y)$, $(\forall)$ x, y $\in \mathbf{R}_+^*$.

La punctul b) am văzut că funcţia $f: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt[z]{\lg x}$ este bijectivă şi $f(x * y) = f(x) \circledz f(y)$ pentru z – impar.

Atunci $f(x \circ y) = \sqrt[z]{\lg(x \circ y)}$, iar $f(x) \cdot f(y) = \sqrt[z]{\lg x} \cdot \sqrt[z]{\lg y} = \sqrt[z]{\lg x \cdot \lg y} =$

$= \sqrt[z]{\lg\left(x^{\lg y}\right)}$.

Deci $\sqrt[z]{\lg(x \circ y)} = \sqrt[z]{\lg\left(x^{\lg y}\right)}$ $(\forall)$ x, y $\in \mathbf{R}_+^* \Rightarrow x \circ y = x^{\lg y}$.