EDIȚIA a VII-a, ARAD - 1993

CLASA a V-a

1. Într-o clasă sunt 35 de elevi. Dintre aceștia 18 elevi îndrăgesc limba română, 19 îndrăgesc matematica și 13 îndrăgesc istoria. Se mai știe că 10 elevi îndrăgesc româna și matematica, 5 elevi româna și istoria, 4 elevi matematica și istoria și 3 elevi îndrăgesc toate cele trei obiecte.
   Câți elevi îndrăgesc numai matematica? Câți elevi din clasă nu îndrăgesc nici unul din aceste obiecte?

***

2. O persoană se angajează la o lucrare în următoarele condițiuni: pentru fiecare zi lucrată va primi 5 dinari și pentru fiecare zi absentă va plăti câte 20 dinari. După 30 de zile a constatat că nu a câștigat nici un dinar dar nici nu este datoare.
   Câte zile a lucrat această persoană?

***

3. Să se determine numerele naturale n pentru care $2^n - 1$ și $2^n + 1$ sunt simultan prime.

CLASA a VI-a

1. Fie ABC un triunghi și [AA'], [BB'], respectiv [CC'] medianele sale:
   a) Demonstrați că există un triunghi cu laturi având lungimile AA', BB', CC'
   b) Demonstrați că există un triunghi cu mediane având lungimile AB, BC, CA.

***

2. Fie ABCD un dreptunghi și H un punct în interiorul său. Prin H ducem o paralelă la AB care intersectează BC în F și o paralelă la BC care intersectează AB în E și CD în G.
   Știind că $AG \perp GF$, demonstrați că H este ortocentrul triunghiului CDE.

Gh Silberberg

3. Găsiți un număr natural n astfel încât primele cifre după virgulă ale lui $\sqrt{n}$ sunt 1993.

***

4. Determinați numerele prime a, b, c, d, e care verifică: a=b+c=d-e.

***

CLASA a VII-a

1. Dintr-un punct A exterior cercului C_1 se duc tangentele AB și AC ($B, C \in C_1$). Fie C_2 cercul ce trece prin A și C și este tangent la BC, iar M al doilea punct de intersecție al celor două cercuri. Dreapta BM mai intersectează C_2 în P. Să se arate că ABCP este paralelogram.

***

2. Fie ABC un triunghi oarecare și $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ astfel încât $\frac{BM}{MA} = \frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$. Fie $\{P\} = BN \cap CM$. Să se determine valoarea raportului dintre ariile triunghiurilor BPC și BAC.

***

3. Să se determine submulțimea A a mulțimii {1,2, ..., 1993} cu cel mai mare număr de elemente care verifică următoarea condiție: dacă $x, y \in A$ și $x \neq y$ atunci x+y se divide cu 13. (Justificare).

D. Miheț

4. Se consideră numerele pozitive x, y, z care verifică
$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}.$$ Să se arate că $xy \le 1$ și $0 \le z \le 2$.

M. Mihet

CLASA a VIII-a

1. Determinați polinoamele cu coeficienți reali P care au gradul mai mare sau egal cu 1, pot fi descompuse în produs de

polinoame de gradul 1 cu coeficienți reali, iar funcția polinomială atașată f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ are proprietatea

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2} \text{ pentru orice valori } x,y \in \mathbf{R}.$$

M. Matache

2. Să se rezolve în **R** ecuația

$$1993\sqrt{x+1993}-\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\ldots\sqrt{x+1993}\right)=0$$

D. Matache

3. Fie $k \in (0,1)$ un număr real dat. Pe muchiile [B'C'] și [CD] ale cubului ABCDA'B'C'D' se aleg punctele M, respectiv N astfel încât $\frac{MC'}{B'C'}=k$ și $\frac{NC}{DC}=k(1-k)$. Demonstrați că triunghiul AMN este ascuțitunghic.

M. Matache

4. Fie ABCD un pătrat de latură 1, d_1 și d_2 respectiv mediatoarele laturilor sale. Notăm cu K_1 și K_2 corpurile ce iau naștere prin rotirea pătratului în jurul lui d_1, respectiv d_2. Fie $K=K_1 \cup K_2$ și V volumul lui K. Demonstrați că $\frac{\pi}{4}<V<1$.

D. Matache

SOLUȚII

EDIȚIA a VII-a 1993 ARAD

CLASA a V-a

1. Diagrama celor trei mulțimi se prezintă astfel:

Din cei 18 elevi care îndrăgesc limba română 7 îndrăgesc și matematica, 2 și istoria și 3 matematica și istoria. Deci 18-(7+3+2)=6 elevi îndrăgesc numai limba română. Din cei 19 elevi care îndrăgesc matematica, 7 îndrăgesc și limba română, 1 îndrăgește și istoria, iar 3 îndrăgesc și limba română și istoria. Deci 19-(7+3+1)=8 elevi îndrăgesc numai matematica. Din cei 13 elevi care îndrăgesc istoria 2 îndrăgesc și limba română, 1 îndrăgește și matematica, iar 3 și limba română și matematica. Deci 13-(2+1+3)=7 elevi îndrăgesc numai istoria.

Atunci 35-(6+7+8+2+3+1+7)=1 elev nu îndrăgește nici un obiect din cele trei.

2. Notăm cu x numărul zilelor lucrate. Pentru fiecare zi nelucrată trebuie să lucreze 20:5=4 zile. Deci la fiecare cinci zile n-are câștig și nici datorii. Din cele 30 de zile se pot forma 6 astfel de grupe. Deci x=6×4=24 de zile lucrează persoana.

3. Pentru n=1 avem $2^1-1=1$ și $2^1+1=3$ care nu corespunde.

Pentru n=2 avem $2^2-1=3$ și $2^2+1=5$ care sunt simultan prime.

Soluția 1.

Pentru n=2k, k>1, k∈ **N** avem:

$2^{2k}-1=\left(2^k\right)^2-1=\left(2^k-1\right)\left(2^k+1\right)$, deci nu este număr prim.

Pentru n=2k+1, k>1,k∈ **N** avem:

$2^{2k+1}+1=(2+1)\left(2^{2k}-2^{2k-1}+2^{2k-1}-\dots-2+1\right)$ care nu este număr prim.

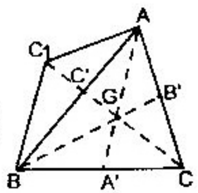
Soluția 2.

Dacă n>2, considerăm numerele 2^n-1, 2^n, 2^n+1. Dintre aceste trei numere consecutive cel puțin unul se divide cu 3. Cum 2^n nu se divide cu 3, cel puțin unul din numerele 2^n-1 sau 2^n+1 se divide cu 3 și cum $n \geq 3$, acestea sunt diferite de 1 și de 3. Prin urmare, dacă n>2, cel puțin unul din numerele 2^n-1 sau 2^n+1 nu este prim.

Deci pentru n=2, numerele 2^n-1 și 2^n+1 sunt simultan prime.

CLASA a VI-a

1. a)



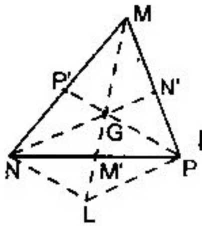
Într-un triunghi medianele sunt concurente în același punct G, care se află pe fiecare din ele la două treimi de vârf și o treime de latură. Deci $GC'=\frac{1}{3}CC'$, $BG=\frac{2}{3}BB'$ și $AG=\frac{2}{3}AA''$.

Prelungim CC' dincolo de C' cu $[C'C_1]\equiv[C'G]$. Atunci patrulaterul $BGAC_1$ este paralelogram, deoarece diagonalele sale se înjumătățesc. Atunci $BC_1=AG$ și în ΔBGC_1 avem:

$C_1G<BG+BC_1=BG+AG=\frac{2}{3}BB'+\frac{2}{3}AA'$ de unde:

$2GC'<\frac{2}{3}(BB'+AA')$, adică $\frac{2}{3}CC'<\frac{2}{3}(BB'+AA')$ și rezultă

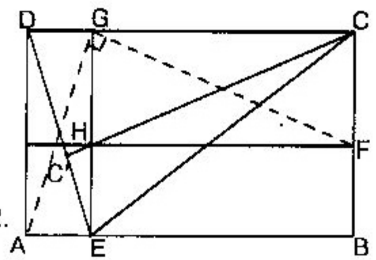
$CC'<BB'+AA'$.
Analog putem dovedi că $AA'<BB'+CC'$ și $BB'<AA'+CC'$, adică AA', BB', CC' pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

b) 

Dacă AB, BC, CA sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci $AB<BC+CA$; $CA<AB+BC$; $BC<AB+AC$.

Construim paralelogramul LNGP de laturi $NG=\frac{2}{3}BC$, $GP=\frac{2}{3}CA$ și diagonala $GL=\frac{2}{3}AB$. Atunci în ΔNGP avem

$NP<NG+GP=\frac{2}{3}(BC+CA)$. Dacă M este simetricul lui L față de G atunci $NG+GP<MN+MP$, de unde $NP<NG+GP<MN+MP$. Analog se arată că $MN<NG+GM<NP+MP$ și $MP<MG+PG<MN+NP$. Deci există un triunghi MNP în care medianele au lungimile AB,BC,CA.



2. Pentru ca punctul H să fie ortocentru în ΔECD trebuie să arătăm că este punctul de intersecție a două înălțimi ale triunghiului. Din ipoteză $GE \parallel AD$, $AD \perp DC$ de unde $GE \perp DC$. În dreptunghiul HFCG, [HC] și [GF] sunt diagonale și $\sphericalangle HCG \equiv \sphericalangle FGC$.
Apoi $m(\sphericalangle FGC)+M(\sphericalangle HGF)=90^0$ și $m(\sphericalangle AGE)+m(\sphericalangle EGF)=90^0$ de unde $\sphericalangle FGC \equiv \sphericalangle GCH \equiv \sphericalangle EGA$. În dreptunghiul AEGD avem $\sphericalangle AGE \equiv \sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle GCH$. Cum $m(\sphericalangle ADE)+m(\sphericalangle EDC)=90^0$ rezultă

că $m(\sphericalangle GCH)+m(\sphericalangle EDC)=90^0$ și atunci $m(\sphericalangle CC'D)=90^0$, adică $CC' \perp DE$ și $\{H\}=EG \cap CC'$, adică H este ortocentru în ΔECD.

3. Fie $k \in \mathbf{N}$ cu proprietatea $k+0,1993 \le \sqrt{n} < k+0,1994$. Atunci:

$(k+0,1993)^2 \le n < (k+0,1994)^2$, adică

$k^2+2k\cdot 0,1993+0,1993^2 \le n < k^2+2k\cdot 0,1994+0,1994^2$,
de unde rezultă că:

$\left[k^2+2k\cdot 0,1994\right]-\left[k^2+2k\cdot 0,1993\right]=1$ sau:

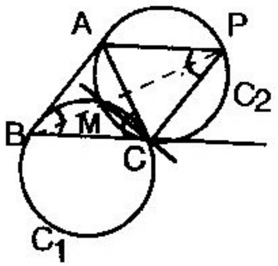
$2k\cdot 0,1994-2k\cdot 0,1993=1$.
De aici obținem $2k0,0001=1$, adică $k=5000$.

Deci $5000,1993 \le \sqrt{n} < 5000,1994$, adică:

$(5000,1993)^2 \le n < (5000,1994)^2$.
Efectuând calculele se obține:
$(5000,1993)^2=25001993,03972049$ și
$(5000,1994)^2=25001994,03976036$.
De aici rezultă că un număr natural cu proprietatea cerută este 25.001.994.

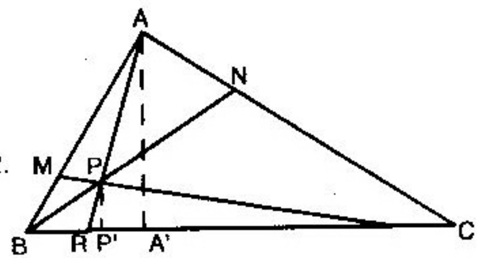
4. Dacă b și c sunt numere prime impare, atunci $a=b+c$ este număr prim par, adică $a=2$ și $b=1$, $c=1$ care nu convine problemei.
Deci b sau c trebuie să fie prim par adică $b=2$ sau $c=2$.
Dacă $b=2$ atunci $c=a-2$ și respectiv pentru $c=2$ avem $b=a-2$ cu a număr prim. Analog din $a=d-e$, cu a,d,e numere prime nu putem avea d și e ambele impare. Rezultă că $e=2$ și $d=a+2$.
În concluzie $b=a-2$;a;$d=a+2$ trebuie să fie trei numere impare consecutive și prime. Pentru $a=5$ avem:
$a=5$, $b=3$, $c=2$, $d=7$, $e=2$ care constituie soluție a problemei.
Dovedim că aceasta este unică.
Pentru $a=3k+1$ avem $d=3k+3=3(k+1)$ care nu este număr prim pentru $k>1$.
Pentru $a=3k$, și $k>1$ a nu este prim.
Dacă $b=2$, atunci $c=a-2$, $d=a+2$ și $e=2$ și numerele sunt $a=5$, $b=2$, $c=3$, $d=7$, $e=2$ despre care se poate arăta că este și ea unică.
Deci avem soluțiile:
$a=5;b=2;c=3;d=7;e=2$ sau $a=5;b=3;c=2;d=7;e=2$.

CLASA a VII-a

1. 

Din faptul că AB și AC sunt tangentele din A la cercul C_1 avem [AB]≡[AC] și ∢ABC≡∢ACB. Apoi ∢ACB≡∢APC, ca unghiuri cu vârful pe cerc și cuprind între laturi același arc. În cercul C_1 m(∢ABM)=$\frac{1}{2}$m(arcBM), ca unghi format de tangenta la cerc în punctul B și coarda [BM]. Tot în cercul C_1 avem m(∢BCM)=$\frac{1}{2}$m(arc BM) ca unghi înscris în cerc, deci ∢ABM≡∢BCM.

În cercul C_2 avem m(∢CPM)=$\frac{1}{2}$m(arcCM) ca unghi format de tangenta la cercul C_2 în punctul C și coarda [CM]. Deci ∢BCM≡∢CPM și cum anterior am arătat că ∢BCM≡∢ABM, rezultă că ∢ABP≡∢CPB și AP II PC.
Din faptul că AB II PC avem m(∢ABM)+m(∢BCP)=180^0 și cum ∢ABC≡∢CPA rezultă că și m(∢BCP)+m(∢CPA)=180^0 și BC II AP. Deci ABCP este paralelogram.

2. 

Din ipoteză avem:

$\frac{MB}{MA}=\frac{AN}{NC}=\frac{1}{2}$. Construim AP și fie {R}=BC∩AP.
În ΔABC aplicăm teorema lui Ceva:

$\frac{MB}{MA}\cdot\frac{AN}{NC}\cdot\frac{RC}{RB}=1$ adică $\frac{1}{4}\cdot\frac{RC}{RB}=1$ de unde RC=4RB.
În ΔABR aplicăm teorema lui Menelaus pentru secanta MC.

$\frac{MB}{MA}\cdot\frac{PA}{PR}\cdot\frac{CR}{CB}=1$ de unde $\frac{1}{2}\cdot\frac{PA}{PR}\cdot\frac{4}{5}=1$, adică $\frac{PA}{PR}=\frac{5}{2}$
Construim proiecțiile lui A și P pe BC care sunt A', respectiv P'. Atunci $\frac{AA'}{PP'}=\frac{7}{2}$ și $\frac{\sigma[PBC]}{\sigma[ABC]}=\frac{2}{7}$

3. Este evident că dacă x=13k și y=13ℓ din mulțimea {1,2,3,...,1993}, atunci x+y=13(k+ℓ) care se divide cu 13. În acest caz o submulțime care verifică condiția din enunț este $A=\left\{x \mid x=13k \text{ și } k=\overline{1,153}\right\}$ și are 153 de elemente. Această submulțime nu poate fi completată cu numere care nu sunt multipli de 13 deoarece un astfel de element de forma $z=13k_1+\ell$ cu $\ell\in\{1,2,3,...,12\}$ adunat cu x=13k ne dă $x+z=13k+13k_1+\ell=13(k+k_1)+\ell$ cu $1\le\ell\le12$ care nu se divide cu 13. Dacă submulțimea ar fi formată din numere care nu sunt multipli de 13, dar au suma divizibilă cu 13 am avea $x=13k_1+r_1, y=13k_2+r_2$ cu $r_1+r_2=13$. Fie $z=13k_3+r_3$ un alt element al submulțimii cu proprietatea că x+z, respectiv y+z este divizibil cu 13. Din $r_1+r_3=13$ și $r_2+r_3=13$ rezultă că $r_1=r_2$. Deci submulțimea, cu proprietatea din enunț, formată din numere care nu sunt multipli de 13, dar au suma divizibilă cu 13 are numai două elemente. Rezultă că submulțimea A maximală este cea a multiplilor de 13.
4. Sistemul de mai sus se poate scrie:

$$\begin{cases} x+2y=4-z \\ 2x+y=2+z \end{cases}$$ cu soluția $x=z$ și $y=2-z$.

Cum $x\ge0, y\ge0$ și $z\ge0$ atunci:

$2-z \ge 0$, adică $z \le 2$ şi avem $0 \le z \le 2$.
Folosind apoi inegalitatea mediilor avem:

$$xy \le \frac{x+y}{2} = \frac{x+2-z}{2} = 1$$ de unde rezultă că $xy \le 1$.

CLASA a VIII-a

1. Dacă polinomul P este de gradul I atunci funcţia polinomială ataşată este f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax+b$ cu $a \ne 0$. Atunci:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = a\frac{x+y}{2} + b; \quad \frac{f(x)+f(y)}{2} = \frac{ax+b+ay+b}{2} = \frac{a}{2}(x+y)+b$$

de unde rezultă că: $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ pentru orice polinom de gradul I, $P(x)=aX+b$.

Dacă grad P ≥ 2 şi se descompune în factori de gradul I, atunci funcţia polinomială ataşată este:

$$f:\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n)$$

Din datele problemei trebuie să avem:

$$\frac{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots(a_nx+b_n)+(a_1y+b_1)(a_2y+b_2)\ldots(a_ny+b_n)}{2} =$$

$$= \left(a_1\frac{x+y}{2}+b_1\right)\left(a_2\frac{x+y}{2}+b_2\right)\cdots\left(a_n\frac{x+y}{2}+b_n\right)$$ pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$. Pentru $y=0$ obţinem:

$$\frac{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots(a_nx+b_n)+b_1b_2\cdots b_n}{2} =$$

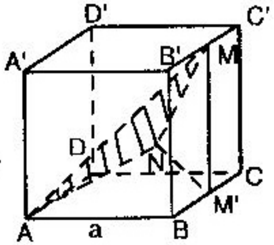
$$\left(\frac{a_1}{2}x+b_1\right)\left(\frac{a_2}{2}x+b_2\right)\ldots\left(\frac{a_n}{2}x+b_n\right)$$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

În mod necesar avem: $\frac{a_1a_2\cdots a_n}{2} = \frac{a_1a_2\cdots a_n}{2^n}$ de unde $2^n = 2$, adică $n=1$. Rezultă că numai funcţiile polinomiale de gradul întâi verifică relaţia din enunţ.

2. Ecuaţia mai poate fi scrisă:

$$\left(\sqrt{x+1993}-\sqrt{x+1}\right)+\left(\sqrt{x+1993}-\sqrt{x+2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{x+1993}-\sqrt{x+1992}\right)=0$$

Cum expresia este definită pentru $x \ge -1$, atunci toate parantezele sunt numere strict pozitive şi suma lor este diferită de zero. Deci ecuaţia nu are soluţie.

3. 

Pentru ca triunghiul AMN să fie ascuţitunghic trebuie ca să avem relaţiile:

$AN^2 < MN^2 + AM^2$;

$MN^2 < AN^2 + AM^2$ şi $AM^2 < AN^2 + MN^2$

Fie muchia cubului de lungime a. Atunci:

$MC' = ka$ $NC = k(1-k)a$ şi $ND = a - k(1-k)a = a(1-k+k^2)$

şi $MB' = a - ka = a(1-k)$.

Din $\Delta AB'M$, dreptunghic în B' avem:

$AM^2 = AB'^2 + B'M^2 = 2a^2 + a^2(1-k)^2 = a^2(3-2k+k^2)$.

Din ΔADN, dreptunghic în D avem:

$AN^2 = AD^2 + DN^2 = a^2 + a^2(1-k+k^2)^2$.

Din $\Delta MM'N$, dreptunghic în M' avem:

$MN^2 = MM'^2 + M'N^2 = a^2 + M'C^2 + NC^2 = a^2 + k^2a^2 + k^2(1-k)^2a^2$

Atunci:

$AM^2 + MN^2 = a^2(3-2k+k^2) + a^2\left[1+k^2+k^2(1-k)^2\right] =$

$= a^2(3-2k+k^2+1+k^2+k^2-2k^3+k^4) = a^2(4-2k+3k^2-2k^3+k^4)$;

$AN^2 + AM^2 = a^2 + a^2(1-k+k^2)^2 + a^2(3-2k+k^2) =$

$$= a^2(1+1+k^2+k^4-2k+2k^2-2k^3+3-2k+k^2) =$$

$$= a^2(4-4k+4k^2-2k^3+k^4);$$

$$AN^2 + AM^2 = a^2 + a^2(1-k+k^2)^2 + a^2 + k^2a^2 + k^2(1-k)^2a^2 =$$

$$= a^2(1+1+k^2+k^4-2k+2k^2-2k^3+1+k^2+k^2-2k^3+k^4) =$$

$$= a^2(3+5k^2-2k-4k^3+2k^4).$$

De aici rezultă că:

$$AN^2 + MN^2 = a^2(3-2k+5k^2-4k^3+2k^4) > a^2(3-2k+k^2)$$

deoarece:

$2k^4-4k^3+4k^2 = 2k^2(k^2-2k+2) > 0$ pentru $k \in (0,1)$.

Deci $AN^2 + MN^2 > AM^2$.

$$AN^2 + AM^2 = a^2(4-4k+4k^2-2k^3+k^4) > a^2(1+2k^2-2k^3+k^4)$$

deoarece $2k^2-4k+3>0$ pentru $k \in (0,1)$ deci

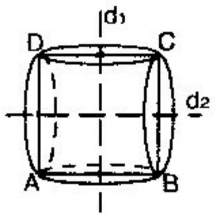
$AN^2 + AM^2 > MN^2$.

$$AM^2 + MN^2 = a^2(3-2k+k^2) + a^2(1+2k^2-2k^3+k^4) >$$

$$> a^2(2-2k+3k-2k^3+k^4)$$

deoarece $4-2k+3k^2-2k^3+k^4 > 2-2k+3k^2-2k^3+k^4$ pentru $k \in (0,1)$.

Deci condițiile necesare pentru ca triunghiul AMN să fie ascuțitunghic sunt verificate.

4. 

Prin rotirea pătratului în jurul mediatoarei

laturilor opuse se obțin doi cilindri de rază $R=\frac{1}{2}$ și înălțime $h=1$.

$V_1 = \pi R^2 h = \frac{1}{4}\pi$ și $V_2 = \frac{1}{4}\pi$ $V = V_{K_1 \cup K_2} > V_2 = \frac{1}{4}\pi$

Diametrul bazelor cilindrilor fiind de lungime 1, corpul $K_1 \cup K_2$ poate fi înscris într-un cub de muchie 1, bazele cilindrilor fiind cercuri înscrise în fețe ale cubului.

Cum $V_{cub}=1 \Rightarrow V = V_{K_1 \cup K_2} < 1$. Deci $\frac{1}{4}\pi < V < 1$. c.c.t.d.

EDIȚIA a VII-a, ARAD - 1993

CLASA a IX-a

1. Pe baza mare [AB] a trapezului ABCD se alege un punct arbitrar M prin care se duc paralelele MP, MQ la BD respectiv AC ($P\in AD$, $Q\in BC$). PQ intersectează AC și BD respectiv în R și S. Să se arate că PR=SQ.

D. Miheț, Timișoara

2. Fie ABC un triunghi și M și N mijloacele laturilor [AB] respectiv [AC]. Să se arate că dacă $m(\sphericalangle ABN) = m(\sphericalangle ACN) = 30^\circ$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

3. Să se afle soluțiile reale ale sistemului

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = 1 \end{cases} \qquad (n \geq 2)$$

4. Fie $f:\mathbf{N}^* \to \mathbf{N}$ o funcție cu proprietățile:
   i) $f(m.n)=f(m)+f(n)$, $(\forall) m,n \in \mathbf{N}^*$
   ii) $f(10)=0$
   iii) $f(k)=0$
   pentru orice număr natural k care se termină în cifra 3.
   Să se determine f(1994).

CLASA a X-a

1. Să se determine toate perechile de numere reale (x,y) care satisfac simultan relațiile:

$$\begin{cases} \left(7-2y\sqrt{3}\right)^x - 14\left(y-\sqrt{3}\right)^x + 1 \leq 0 \\ 3^y + \log_7(y+5) = 10 \end{cases}$$

2. Se consideră polinomul de gradul n ($n \geq 3$).

$$P = 1 + 2C_n^2 x^2 + \sum_{k=3}^{n} A_k^2 C_n^k x^k$$. Să se arate că:

a) $P(x)-1$ se divide cu $x+1$, pentru orice n.

b) $P(1)-P(-1)$ se divide cu 2^{n-2}.

3. Prin vârful O al tetraedrului [OABC] se duce un plan paralel cu BC care intersectează muchiile [AB], [AC] respectiv în D și E. Să se arate că:

a) $v^2[OADME]=v[OABC]\cdot v[OADE]$ oricare ar fi punctul M ce aparține muchiei [BC].

b) Nu există nici un punct $M \in [BC]$ astfel încât: $v[OMBD]+v[OMCE]=v[OMDE]$.

4. Fie $A_1A_2...A_n$ un poligon convex regulat cu n laturi ($n>4$) astfel încât are loc una din următoarele proprietăți (numite ipoteze):

(P_1) $A_1A_2\cdot(A_1A_3+A_1A_4)=A_1A_3\cdot A_1A_4$

(P_2) $\dfrac{A_1A_3}{A_1A_2} - \dfrac{A_1A_2}{A_1A_3} = 1.$

Se consideră propozițiile (numite concluzii):

(Q_1) $n=5$

(Q_2) Poligonul $A_1A_2...A_n$ are toate diagonalele congruente.

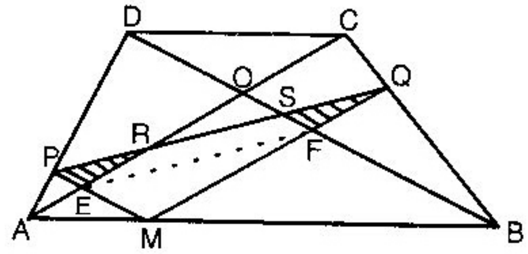
(Q_3) $n=7$.

Se cere ca la fiecare ipoteză (P_i), $i=1,2$ să se asocieze concluzia (concluziile) (a_j), $j=1,2,3$ astfel încât $(P_i)\Rightarrow(a_j)$ să fie adevărată. Justificați răspunsul.

SOLUȚII

EDIȚIA a VII-a 1993 ARAD

CLASA a IX-a

1. 

Din PE ‖ DO în triunghiul ADO obținem:

$\frac{PE}{DO} = \frac{AE}{AO}$. EM ‖ OB în triunghiul AOB ne dă

$\frac{EM}{OB} = \frac{AE}{AO}$ de unde $\frac{PE}{DO} = \frac{EM}{OB} \Rightarrow \frac{PE}{EM} = \frac{DO}{OB}$ (1).

Din QM ‖ AC avem în triunghiul BOC,

$\frac{FQ}{OC} = \frac{FB}{OB} = \frac{FM}{OA}$, de unde $\frac{FQ}{FM} = \frac{OC}{OA}$ (2).

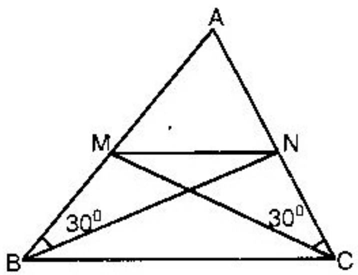
Cum AB ‖CD obținem $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}$ (3).

Din (1), (2) și (3) avem $\frac{PE}{EM} = \frac{FQ}{FM} \Rightarrow$ din reciproca teoremei lui Thales în triunghiul MPQ că EF ‖ PQ.

Atunci PEFS este paralelogram și avem [PE]≡[SF].

Apoi ΔPER≡ΔSFQ (ULU) și rezultă că PR=SQ.

2. Din m(∢ABN)=m(∢ACM) rezultă că patrulaterul BCNM este inscriptibil. Cum MN este linie mijlocie, patrulaterul BCNM este trapez și fiind inscriptibil trapezul BMNC este isoscel, adică MB=NC, de unde AB=AC.



În triunghiul MNB aplicăm teorema lui Pitagora generalizată.

$MN^2 = BM^2 + BN^2 - 2BM \cdot BN \cos 30^0 \Leftrightarrow$

$$\frac{a^2}{4} = \frac{c^2}{4} + \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4} - 2\frac{c}{2}\frac{\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$a^2 = c^2 + 2a^2 + c^2 - c\sqrt{6a^2+3c^2} \Leftrightarrow c\sqrt{6a^2+3c^2} = 2c^2 + a^2$$

$$\Leftrightarrow c^2(6a^2+3c^2) = 4c^4 + 4a^2c^2 + a^4 \Leftrightarrow c^4 - 2a^2c^2 + a^4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(c^2 - a^2)^2 = 0 \Leftrightarrow c^2 = a^2 \Leftrightarrow c = a.$$

Rezultă că b=c=a și triunghiul este echilateral.

3. Din $x_1^2 + x_2^2 + .. + x_n^2 = 1$ rezultă că $|x_k| \le 1, (\forall)k = \overline{1,n}$ și obținem $x_k^3 \le x_k^2, (\forall)k = \overline{1,n}$.

   De aici avem $1 = x_1^3 + x_2^3 + .. + x_n^3 \le x_1^2 + x_2^2 + .. + x_n^2 = 1$

   de unde $x_k^3 = x_k^2, (\forall)k = \overline{1,n}$.

   Deci $x_k^2(1 - x_k) = 0, (\forall)k = \overline{1,n}$, de unde $x_k = 0$ sau $x_k = 1$.

   Dacă $x_k = 1$ atunci $x_1 = x_2 = ... = x_{k-1} = x_{k+1} = ... = x_n = 0$.
   În final rezultă soluțiile
   (1,0,0,...,0) sau (0,1,0,...,0), ... sau (0,0,0,...,1).

4. Din f(10)=0 obținem f(2·5)=f(2)+f(5)=0.
   Cum f:$\mathbf{N}^* \to \mathbf{N}$ rezultă f(2)≥0, f(5)≥0 și din f(2)+f(5)=0 rezultă f(2)=f(5)=0.

Apoi f(9)=f(3·3)=f(3)+f(3)=0 conform iii).
Atunci f(1994)=f(2·997)=f(2)+f(997)=f(997)
f(8973)=f(9·997)=f(9)+f(997)=0
Dar f(9)=0 și atunci f(997)=0, iar din f(1994)=f(997)=0 avem că f(1994)=0.

CLASA a X-a

1. Din ecuația $3^y + \log_7(y+5) = 10$ intuim că y=2 este soluție.
   Folosind proprietatea de monotonie a funcției exponențiale și logaritmice, cu bază supraunitară, dovedim că este unică.
   Presupunem că $(\exists)y_0<2$ și $y_0>-5$ soluție a ecuației.
   Atunci $3^{y_0} < 3^2$ și $\log_7(y_0+5) < \log_7 7$ de unde

   $3^{y_0} + \log_7(y_0+5) < 10$, contradicție. Analog dovedim că pentru $y_1 > 2$ obținem contradicție.
   Introducem valoarea y=2 în inecuație și obținem:

   $$(7-4\sqrt{3})^x - 14(2-\sqrt{3})^x + 1 \le 0$$

   Cum $7 - 4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2$ obținem

   $$(2-\sqrt{3})^{2x} - 14(2-\sqrt{3})^x + 1 \le 0$$

   Notăm $(2-\sqrt{3})^x = t$ și obținem $t^2 - 14t + 1 \le 0$ cu soluția

   $t \in [7-4\sqrt{3}, 7+4\sqrt{3}]$ sau

   $7 - 4\sqrt{3} \le (2-\sqrt{3})^x \le 7 + 4\sqrt{3}$ echivalentă cu

   $$(2-\sqrt{3})^2 \le (2-\sqrt{3})^x \le (2+\sqrt{3})^2 = (2-\sqrt{3})^{-2}.$$

   Dar $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$ și avem $-2 \le x \le 2$.
   Deci $x \in [-2,2]$ și y=2.

2. a) Prin calcul obținem $A_k^2 C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$ de unde

$$P = 1 + 2C_n^2 x^2 + n(n-1)\sum_{k=3}^{n} C_{n-2}^{k-2} x^k =$$

$$= 1 + n(n-1)x^2 + n(n-1)\left(C_{n-2}^1 x^3 + C_{n-2}^2 x^4 + \ldots + C_{n-2}^{n-2} x^n\right) =$$

$$= 1 + n(n-1)x^2\left(1 + C_{n-2}^1 x + C_{n-2}^2 x^2 + \ldots + C_{n-2}^{n-2} x^{n-2}\right) =$$

$$= 1 + n(n-1)x^2(1+x)^{n-2}.$$

Atunci P(-1)-1=1-1=0 și x+1 divide P(X)-1.

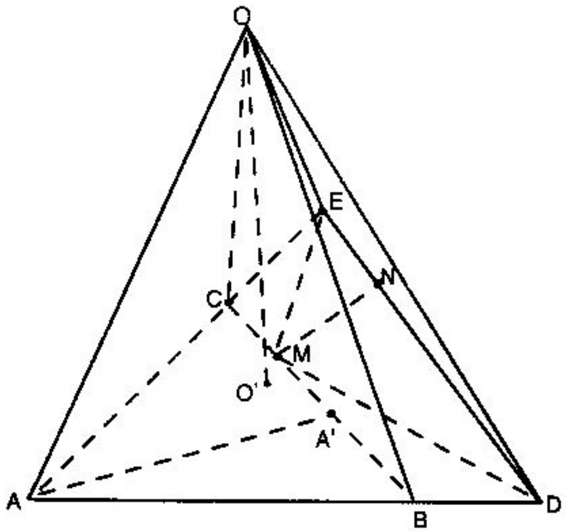
b) P(-1)=1

$P(1)=1+n(n-1)2^{n-2}$, de unde obținem

$P(1)-P(-1)=1+n(n-1)2^{n-2}-1=n(n-1)2^{n-2}$ și rezultă că:

$2^{n-2} \mid (P(1)-P(-1))$.

3.



a) Fie (OED) ǁ BC și (ABC)∩(OED)=DE de unde BC ǁ DE.
Prin calcul obținem

$$V(OADME) = \frac{1}{3}\sigma(ADME)\cdot OO'$$

$$V(OABC) = \frac{1}{3}\sigma(ABC)\cdot OO'$$

$$V(OADE) = \frac{1}{3}\sigma(ADE)\cdot OO'.$$

$$V(OABC)\cdot V(OADE) = \frac{1}{9}\sigma(ABC)\sigma(ADE)\cdot OO'^2$$

Din BC ǁ DE obținem $\dfrac{\sigma(ADE)}{\sigma(ABC)} = \left(\dfrac{AA'+MN}{AA'}\right)^2$ și

$$\sigma(ADE) = \left(1 + \frac{MN}{AA'}\right)^2 \sigma(ABC).$$

Atunci $\sigma(ABC)\cdot\sigma(ADE) = \left(1+\dfrac{MN}{AA'}\right)^2 \sigma^2(ABC) =$

$$= \left(\sigma(ABC) + \frac{MN}{AA'}\sigma(ABC)\right)^2 = \left(\sigma(ABC) + \frac{MN}{AA'}\cdot\frac{1}{2}BC\cdot AA'\right)^2 =$$

$$= \left(\sigma(ABC) + \frac{1}{2}BC\cdot MN\right)^2 = \left(\sigma(ABC) + \frac{1}{2}BM\cdot MN + \frac{1}{2}MC\cdot MN\right)^2 =$$

$$= \left(\sigma(ABC) + \sigma(BDM) + \sigma(CEM)\right)^2 = \sigma^2(ADME)$$

De aici rezultă $\frac{1}{9}\sigma^2(ADME)OO'^2 = \frac{1}{9}\sigma(ABC)\cdot\sigma(ADE)\cdot OO'^2$

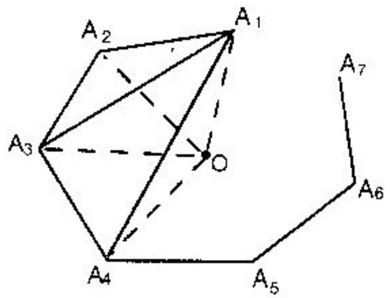
adică $V^2(OADME)=V(OABC)\cdot V(OADE)$ c.c.t.d.

b) Presupunem că există M∈[BC] astfel încât avem V[OMBD]+V[OMCE]=V[OMDE], de unde

$$\frac{1}{3}\sigma(MBD)OO' + \frac{1}{3}\sigma(MCE)OO' = \frac{1}{3}\sigma(MDE)\cdot OO'$$

de unde rezultă $\sigma(MBD)+\sigma(MCE)=\sigma(MDE)$ sau

$\frac{1}{2}BM \cdot MN + \frac{1}{2}MC \cdot MN = \frac{1}{2}DE \cdot MN \Rightarrow BC = DE$, contradicție.

4. 

Dacă poligonul convex regulat are n laturi atunci

$m(\sphericalangle A_1OA_2)=m(\sphericalangle A_2OA_3)=...=m(\sphericalangle A_nOA_1)=\frac{2\pi}{n}$ și

$A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=...=A_nA_1=2R\sin\frac{\pi}{n}$.

Apoi obținem $A_1A_3=2R\sin\frac{2\pi}{n}$; $A_1A_4=2R\sin\frac{3\pi}{n}$.

Atunci ipoteza (P_1) se scrie

$2R\sin\frac{\pi}{n}\left(2R\sin\frac{2\pi}{n}+2R\sin\frac{3\pi}{n}\right)=2R\sin\frac{2\pi}{n}\cdot 2R\sin\frac{3\pi}{n}$, de unde:

$\sin\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}\right)=\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sin\frac{3\pi}{n}$ echivalent cu

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{3\pi}{n}-\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sin\frac{3\pi}{n}=0 \Leftrightarrow$$

$$\sin\frac{2\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}-\sin\frac{3\pi}{n}\right)+\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{3\pi}{n}=0 \Leftrightarrow$$

$$-\sin\frac{2\pi}{n}2\cos\frac{2\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{3\pi}{n}=0 \Leftrightarrow$$

$$-\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{4\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{3\pi}{n}=0 \Leftrightarrow$$

$$\sin\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{3\pi}{n}-\sin\frac{4\pi}{n}\right)=0$$

Cum $\sin\frac{\pi}{n}\neq 0$ avem $\sin\frac{3\pi}{n}=\sin\frac{4\pi}{n}$ cu n=7.

Deci pentru ipoteza (P_1) avem concluzia (Q_3).

Din ipoteza (P_2) obținem:

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}-\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}}=1 \Leftrightarrow 2\cos\frac{\pi}{n}-\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{n}}=1 \Leftrightarrow$$

$4\cos^2\frac{\pi}{n}-2\cos\frac{\pi}{n}-1=0$ de unde $\cos\frac{\pi}{n}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ sau

$\cos\frac{\pi}{n}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}<0$ care nu convine pentru n>4.

Este cunoscut faptul că avem $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ de unde rezultă că n=5 și atunci ipoteza (P_2) are concluzia (Q_1).

3. Aflaţi partea întreagă a numărului real: $A = \int_2^3 \frac{x}{\ln x} dx$

* * *

4. Să se arate că ecuaţia: $\sin x^2 \cdot \int_x^{\frac{\pi}{2}} e^{t^2} dt - e^{x^2} \cdot \int_0^x \sin t^2 dt = 0$ are cel puţin o soluţie în $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

M. Neacşu, Caransebeş

5. Construiţi o funcţie $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ cu proprietăţile:

(*i*) f este integrabilă pe $[n, n+1]$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$;

(ii) $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = \infty$; (iii) $\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} f(x)dx = 0$

* * *

EDIŢIA a VII -a - ARAD - 1993

Clasa a XI-a

1. Să se determine valorile lui a, $a \in \mathbf{R}$ pentru care şirul $(x_n)_{n\geq 1}$are limită, ştiind că $x_{n+1} = a \cdot x_n + \frac{a^n}{n(n+1)}$, $(\forall)\, n \geq 1$.

* * *

2. Se consideră $X, Y, Z \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ şi relaţiile

$1°$: $mX + mY = 2 \cdot XY$; $2°$: $mY + mZ = 2 \cdot YZ$; $3°$: $mZ + mX = 2 \cdot ZX$,
unde $m \in \mathbf{C}$ este fixat. Se cere să se determine:

2a) Valorile lui m pentru care $(1°) \Rightarrow (XY = YX)$.

2b) Soluţiile nesingulare ale sistemului definit de relaţiile $(1°)$, $(2°)$, $(3°)$, pentru $m \neq 0$.

3. Fie $p \in \mathbf{R}$ şi $A_p \subset \mathbf{R}^2$, $A_p = \{(x, y) \mid T_1 = y(y-1) \leq 0,\ T_2 = [x-p(1-y)-1] \cdot [x-p(1-y)+1] \leq 0,\ T_1 \cdot T_2 = 0\}$. Se cere:

3a) Să se figureze în planul $\mathbf{R}^2$, mulţimea A_p.

3b) Să se determine mulţimea $A = \bigcap_{p\in\mathbf{R}} A_p$.

3c) Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(E_1) A_p admite o axă de simetrie.

(E_2) A_p admite două axe de simetrie.

V. Radu, Timişoara

Clasa a XII-a

1. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie monotonă. Definim funcţia $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ prin $g(x) = f(x+0) - f(x-0)$, unde

$$f(x+0) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{y\to x \\ y>x}} f(y), & \text{dacă } x \neq b \\ f(b), & \text{dacă } x = b \end{cases};\quad f(x-0) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{y\to x \\ y<x}} f(y), & \text{dacă } x \neq a \\ f(a), & \text{dacă } x = a \end{cases}$$

(i) Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Să se arate că mulţimea $A = \{x \mid x \in [a, b],\ g(x) > \varepsilon\}$ este finită.

(ii) Să se studieze dacă g este integrabilă pe $[a, b]$.

* * *

2. Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietăţile:

(i) f este continuă pe I.

(ii) $\exists\, x_0 \in I$ încât $f(x) = 1 + \int_{x_0}^x f^2(t)dt$, $(\forall)\, x \in I$.

a) Să se arate că f este derivabilă pe I.

b) Să se arate că nu există funcţie cu proprietăţile (i), (ii) şi $I = \mathbf{R}$.

* * *

3. Fie $(G, \cdot)$ un grup necomutativ finit şi H un subgrup a lui $(G, \cdot)$, $H \neq G$, astfel încât $x = x^{-1}$, $(\forall)\, x \in G - H$. Demonstraţi că H este comutativ şi că $|G| = 2|H|$, unde $|G|$ înseamnă numărul elementelor lui G.

* * *

4. Un element x al unui inel se numeşte nilpotent dacă $(\exists)\, n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $x^n = 0$.

a) Demonstraţi că dacă x este nilpotent, atunci x nu este inversabil, dar $1 + x$ este inversabil.

b) Demonstraţi că un inel comutativ cu 3 elemente inversabile şi cu toate celelalte nilpotente este corp.

S. Bivănaş, Timişoara

Ediţia a VII-a - ARAD - 1993

Clasa a XI-a

1. Din $x_{n+1} = ax_n + \dfrac{a^n}{n(n+1)}$, $(\forall)\ n \geq 1$ obţinem:

$$x_2 = ax_1 + \frac{a}{1\cdot 2}$$

$$x_3 = ax_2 + \frac{a^2}{2\cdot 3} = a\left(ax_1 + \frac{a}{1\cdot 2}\right) + \frac{a^2}{2\cdot 3} = a^2x_1 + \frac{2}{3}a^2 = \left(x_1 + \frac{2}{3}\right)a^2$$

$$x_4 = ax_3 + \frac{a^3}{3\cdot 4} = a\left[\left(x_1 + \frac{2}{3}\right)a^2 + \frac{a^2}{3\cdot 4}\right] = \left(x_1 + \frac{3}{4}\right)a^3$$

....

$$x_n = \left(x_1 + \frac{n-1}{n}\right)a^{n-1}$$

Prin inducţie matematică se dovedeşte că expresia lui x_n este generală.

Deci $x_n = \left(x_1 + \dfrac{n-1}{n}\right)a^{n-1}$, $a \in \mathbf{R}$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} a^{n-1} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } -1 < a < 1 \\ 1, & \text{dacă } \quad a = 1 \\ \infty & \text{dacă } \quad a > 1 \end{cases}$

şi nu există pentru $a \leq -1$, avem: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } -1 < a < 1 \\ x_1 + 1, & \text{dacă } \quad a = 1 \\ (x_1 + 1)\infty & \text{dacă } \quad a > 1 \end{cases}$

Pentru $a \leq -1$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ nu există.

2. a) $mX + mY = 2XY \Leftrightarrow XY = \dfrac{m}{2}X + \dfrac{m}{2}Y \Leftrightarrow XY - \dfrac{m}{2}X - \dfrac{m}{2}Y = O_n \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(X - \frac{m}{2}I_n\right)\left(Y - \frac{m}{2}I_n\right) = \frac{m^2}{4}I_n \qquad (1)$$

Pentru $m \neq 0 \Rightarrow \det\left(X - \dfrac{m}{2}I_n\right)\left(Y - \dfrac{m}{2}I_n\right) = \dfrac{m^2}{4} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det\left(X-\frac{m}{2}I_n\right)\left(Y-\frac{m}{2}I_n\right)\neq 0 \Rightarrow \det\left(X-\frac{m}{2}I_n\right)\neq 0$ şi

$\det\left(Y-\frac{m}{2}I_n\right)\neq 0 \Rightarrow X-\frac{m}{2}I_n$ şi $Y-\frac{m}{2}I_n$ sunt inversabile.

Înmulţim relaţia (1) la stânga cu $\left(X-\frac{m}{2}I_n\right)^{-1}$ şi la dreapta cu $X-\frac{m}{2}I_n$ şi obţinem $\left(Y-\frac{m}{2}I_n\right)\left(X-\frac{m}{2}I_n\right)=\frac{m^2}{4}I_n$ de unde

$YX = \frac{m}{2}X+\frac{m}{2}Y \Rightarrow XY = YX$ pentru $m \neq 0$.

b) Sistemul definit de relaţiile: 1°: $mX + mY = 2XY$
2°: $mY + mZ = 2YZ$
3°: $mZ + mX = 2ZX$

este echivalent cu: 1°: $\left(X-\frac{m}{2}I_n\right)\left(Y-\frac{m}{2}I_n\right)=\frac{m^2}{4}I_n$

2°: $\left(Y-\frac{m}{2}I_n\right)\left(Z-\frac{m}{2}I_n\right)=\frac{m^2}{4}I_n \Rightarrow$

3°: $\left(Z-\frac{m}{2}I_n\right)\left(X-\frac{m}{2}I_n\right)=\frac{m^2}{4}I_n$

$\Rightarrow \left(X-\frac{m}{2}I_n\right)^2\left(Y-\frac{m}{2}I_n\right)^2\left(Z-\frac{m}{2}I_n\right)^2=\frac{m^6}{64}I_n$

Folosind 1° obţinem $Z-\frac{m}{2}I_n=\pm\frac{m}{2}I_n \Rightarrow Z=mI_n\neq O_n$

din 2° obţinem $X-\frac{m}{2}I_n=\pm\frac{m}{2}I_n \Rightarrow X=mI_n\neq O_n$

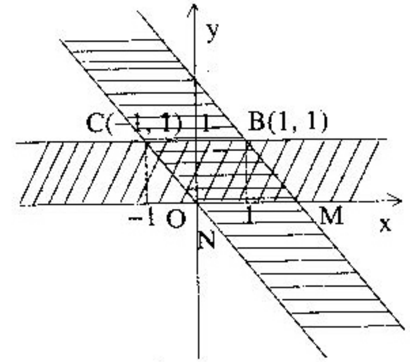
din 3° obţinem $Y-\frac{m}{2}I_n=\pm\frac{m}{2}I_n \Rightarrow Y=mI_n\neq O_n$

Soluţia nesingulară pentru $m \neq 0$ este:

$X = mI_n$; $Y = mI_n$; $Z = mI_n$ $(\forall)\ m \in \mathbf{C}^*$.

3. $A_p = \{(x, y) \mid T_1 = y(y-1) \le 0,\ T_2 = [x-p(1-y)-1]\cdot[x-p(1-y)+1] \le 0,\ T_1, T_2 = 0\}$

3a)



$y\cdot(y-1)\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0\\ y-1\le 0\end{cases}$ sau $\begin{cases} y\le 0\\ y-1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0\\ y\le 1\end{cases}$ sau $\begin{cases} y\le 0\\ y\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow y\in\phi$

sau $y \in [0, 1] \Rightarrow (x, y) \in$ bandei între dreptele paralele $y = 0$ şi $y = 1$.

$[x-p(1-y)-1][x-p(1-y)+1]\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+py-p-1\le 0\\ x+py-p+1\ge 0\end{cases}$ sau

$\begin{cases} x+py-p-1\ge 0\\ x+py-p+1\le 0\end{cases}$

$x + py - p - 1 = 0 \Leftrightarrow x - 1 + p(y - 1) = 0$, $p \in \mathbf{R}$ sau $x + 1 + p(y - 1) = 0$,

$p \in \mathbf{R} \Rightarrow \begin{cases} x=1\\ y=1\end{cases}$ sau $\begin{cases} x=-1\\ y=1\end{cases} \Rightarrow$ fascicului de drepte $x - 1 + p(y - 1) = 0$ trece prin punctul fix B(1, 1), iar fasciculul de drepte $x + 1 + p(y - 1) = 0$ trece prin punctul C(−1, 1).

Dreptele $x + py - p - 1 = 0$ şi $x + py - p + 1 = 0$ sunt paralele pentru $p \in \mathbf{R}$ şi reprezintă două fascicule de drepte paralele ce trec prin B respectiv C.

Rezultă că soluţia inecuaţiei $[x-p(1-y)-1]\cdot[x-p(1-y)+1]\le 0$ este banda dintre dreptele BM, CN.

În acest caz mulţimea $A_p = \{(x, y) \mid (x, y) \in [BC] \cup [CN] \cup [NM] \cup [MB]\}$.

3b) $A = \bigcap_{p\in\mathbf{R}} A_p = [BC]$, deoarece latura [BC] rămâne fixă pentru p variabil.

Clasa a XII-a

2. a) f continuă pe I $\Rightarrow$ f admite primitive pe I $\Rightarrow f(x) = 1 + F(x) - F(x_0)$ cu $F'(x) = f^2(x)$, $(\forall)\ x \in I$. Atunci

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{1+F(x)-F(x_0)-1-F(a)+F(x_0)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = f'(a)$$ care există şi este finită $\Rightarrow$ f derivabilă pe I.

3. H subgrup al lui G $\Rightarrow e \in H$.

Fie $H = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ cu $a_1 = e$ mulţimea elementelor din G de ordin $\neq 2$.

Din $x = x^{-1}$ $(\forall)\ x \in G - H \Rightarrow x^2 = e$ $(\forall)\ x \in G - H$ şi notăm $G - H = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ mulţimea elementelor de ordinul 2 din G.

Atunci $a \in H - \{e\} \Leftrightarrow a^2 \neq e \Leftrightarrow a \neq a^{-1} \Leftrightarrow (a^{-1})^{-1} \neq a^{-1} \Leftrightarrow a^{-1} \in H - \{e\}$. Deci $(\forall)\ a \in H - \{e\} \Rightarrow a \neq a^{-1} \Rightarrow n - 1 = 2k \Rightarrow n$ - impar.

Se dovedeşte apoi că produsul a două elemente din G – H se află în H.

Arătăm apoi că $|H| = |G - H|$. Construim funcţia $f : G - H \to H$, $f(x_i) = x_i x$, unde $x \in G - H$. Cum H şi G – H sunt finite f este injectivă, de unde f este şi surjectivă. Deci $|H| = |G - H|$ şi $|G| = 2|H|$. (Din $f(x_i) = f(x_j) \Rightarrow$ $\Rightarrow x_i x = x_j x \Rightarrow x_i x^2 = x_j x^2 \Rightarrow x_i = x_j \Rightarrow$ f injectivă).

4. a) $x \in A$ nilpotent $\Rightarrow (\exists)\ n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $x^n = 0$.

Presupunem $x \in A$ -inversabil. Atunci $(\exists)\ x^{-1} \in A$ astfel încât $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$. Din $x \cdot x^{-1} = 1 \Rightarrow x^n \cdot x^{-1} = x^{n-1} \Rightarrow x^{n-1} = 0$. (Analog din $x^{-1} \cdot x = 1 \Rightarrow x^{-1} \cdot x^n = x^{n-1} \Rightarrow x^{n-1} = 0$).

În continuare din $x \cdot x^{-1} = 1 \Rightarrow x^{n-1} \cdot x^{-1} = x^{n-2} = 0$.

Rezultă în final că $x = 0$, contradicţie cu x inversabil. Deci dacă x este nilpotent el nu este inversabil. Din $x \in A$ nilpotent rezultă şi $(-x) \in A$ este nilpotent deoarece $(-x)^n = (-1)^n \cdot x^n = 0$, dacă $(\exists)\ n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $x^n = 0$.

Atunci $1 = 1 - x^n = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{n-1}) \Rightarrow 1 - x$ este inversabil. Cum $-x$ este nilpotent şi $1 + x = 1 - (-x)$ rezultă că $1 + x$ este inversabil.

b) Fie A inelul comutativ cu trei elemente inversabile şi toate celelalte nilpotente.

Atunci $A = \{0, 1, x, x^{-1}, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ cu $1, x, x^{-1}$ inversabile şi $(\exists)\ k \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $x_i^k = 0$, cu $i \geq 1$.

Din $x_i^k = 0 \Rightarrow x_i = 0$, $(\forall)\ i \geq 1$ (dovedit de punctul a)).

Rezultă că $A = \{0, 1, x, x^{-1}\}$ este format numai din elemente inversabile $\Rightarrow$ A este corp.