EDIȚIA a VI-a, HUNEDOARA - 1992

CLASA a V-a

1. Fie numerele

$A = 2^{n+1} \cdot 5^n + 1, B = 2^n \cdot 5^{n+1} + 1, C = 2^{n+3} \cdot 5^n + 7, D = 2^{n+1} \cdot 5^{n+3} - 1,$

unde n este un număr natural.

a) Arătați că A, B, C, D nu sunt prime.

b) Arătați că $\frac{7D + C}{B - A}$ este număr natural.

c) poate fi C pătrat perfect?

2. Să se arate că există o singură fracție cu numitorul 15 cuprinsă între $\frac{9}{11}$ și $\frac{10}{11}$.

3. Făcând observații meteorologice de-a lungul unei perioade de câteva zile consecutive, s-a constatat că în nici una din zile nu a plouat și dimineața și după-amiaza. A plouat în total 12 zile și n-a plouat în 9 dimineți și 7 după-amieze. Câte zile au durat observațiile?

4. Produsul numerelor naturale a și b este egal cu 1600, iar cel mai mic multiplu comun al acestor numere este de patru ori mai mare decât cel mai mare divizor comun al lor. Să se afle numerele a și b.

CLASA a VI-a

1. Să se afle numerele naturale a,b,c astfel încât:

$$\frac{a + 1990}{1990} = \frac{b + 1991}{1991} = \frac{c + 1992}{1992} \text{ și } a+b=2c-3.$$

2. Dacă $x, y, z \in \mathbb{Q}_+^*$ și $x + y + z = 10$, să se arate că:

$\sqrt{2x^2+5x}+\sqrt{2y^2+5y}+\sqrt{2z^2+5z}\geq 9$.

3. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle BAC)=60^\circ$, (BD) și (CE) sunt înălțimi, iar O este mijlocul segmentului [BC].
   a) Demonstrați că triunghiul OED este echilateral.
   b) Dacă [AB] este de mărime variabilă iar [AC] este constantă, să se stabilească ce fel de triunghi devine ABC astfel încât latura triunghiului OED să aibă lungime minimă.
4. Fie I intersecția bisectoarelor din B și C ale triunghiului ABC și M mijlocul laturii [BC]. Dacă P este simetricul lui C față de mijlocul laturii [AB], să se arate că nu este posibil ca $IM \parallel BP$.

CLASA a VII-a

1. Convenim să notăm

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots n \text{ și } \min(y,z)=\begin{cases} y \text{ dacă } y\leq z \\ z \text{ dacă } z<y \end{cases} \quad y,z\in\mathbf{N}.$$

Fie $a=\min\{k\in\mathbf{N} \mid 27! \text{ nu se divide cu } 10^{k-1}\}$.

Să se rezolve ecuația în x:

$$\frac{x+m}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{x+m}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x+m}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}=2m^3+10m^2+134$$

unde $m=2^{a-7}+3^{a-6}$.

***

2. Să se arate numerele $n\in\mathbf{N}^*$ pentru care $4n^2+5n+7$ se divide cu 8.
3. Dacă a, b, c respectiv a_1, b_1, c_1 sunt lungimile laturilor triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ să se demonstreze că $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC \Leftrightarrow \sqrt{aa_1}+\sqrt{bb_1}+\sqrt{cc_1}=2\sqrt{pp_1}$ unde

$$p=\frac{a+b+c}{2} \quad \text{și} \quad p_1=\frac{a_1+b_1+c_1}{2}.$$

***

4. În triunghiul ascuțitunghic ABC avem $AD\perp BC$ ($D\in BC$), $M\in DC$ (M fiind între D și C), $BE\perp AM$, $E\in AM$ $CF\perp AM$ ($F\in AM$), $\{G\}=DE\cap AC$ și $\{H\}=FD\cap AB$. Să se arate că patrulaterul AHDG este inscriptibil.

***

CLASA a VIII-a

1. Fie x, y, $z\in\mathbf{R}_+^*$. Să se arate că

$$\frac{x}{5x+y+z}+\frac{y}{x+5y+z}+\frac{z}{x+y+5z}\leq\frac{3}{7}.$$

***

2. Să se rezolve în numere întregi sistemul:

$$\begin{cases} x^2-y^2-z^2=1 \\ y+z-x=3 \end{cases}$$

***

3. Paralelogramul ABCD este baza piramidei SABCD. Diagonalele paralelogramului se intersectează în O. Prin mijlocul segmentului (SO) se duce paralela la mediana [BM] a feței SAB (M este mijlocul lui (SA)). Determinați lungimea segmentului de pe paralela situată în interiorul piramidei știind că AB=6 cm, SB= 8 cm și SA=10 cm.

***

4. În vârfurile A și C ale paralelogramului ABCD cu AB=2a, BC=a, $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$ se ridică, de aceeași parte a planului (ABC), perpendicularele $CC_1=a\sqrt{3}$ și $AA_1=x$. Să se determine x astfel încât $(A_1BD)\perp(C_1BD)$.

***

SOLUȚII

EDIȚIA a VI-a 1992 HUNEDOARA

CLASA a V-a

1.a) $A=2^{n+1}\cdot 5^n+1=2\cdot 2^n\cdot 5^n+1=2\cdot 10^n+1=\underbrace{200...0}_{n-zerouri}+1$

Suma cifrelor lui A este 3 deci A este divizibil cu 3.

$B=2^n5^{n+1}+1=2^n5^n5+1=5\cdot 10^n+1=\underbrace{500..0}_{n-zerouri}+1$

Suma cifrelor lui B este 6 deci B este divizibil cu 3.

$C=2^{n+3}5^n+7=2^3 2^n 5^n+7=8\cdot 10^n+7=\underbrace{8000..0}_{n-zerouri}+7$

Suma cifrelor lui C este 15 deci C este divizibil cu 3.

$D=2^{n+1}+5^{n+3}-1=2\cdot 2^n\cdot 5^n\cdot 5^3-1=5^2\cdot 10^{n+1}-1=25\underbrace{000..0}_{n+1-zerouri}-1=24\underbrace{99..9}_{n+1-cifre}$

Suma cifrelor lui D este număr divizibil cu 3, deci D este divizibil cu 3.

b) $$\frac{7D+C}{B-A}=\frac{7\cdot 2^{n+1}\cdot 5^{n+3}-7+2^{n+3}\cdot 5^n+7}{2^n\cdot 5^{n+1}+1-2^{n+1}\cdot 5^n-1}=\frac{2^{n+1}\cdot 5^n\left(7\cdot 5^3+2^2\right)}{2^n\cdot 5^n(5-2)}=$$

$$=\frac{2\cdot(7\cdot 125+4)}{3}=\frac{2(875+4)}{3}=\frac{2\cdot 879}{3}=2\cdot 293\in \mathbb{N}.$$

c) $C=2^{n+3}\cdot 5^n+7=8\cdot 10^n+7=800...07$

Cum ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0,1,4,5,6,9 rezultă că C nu este pătrat perfect pentru $n\geq 1$.

Pentru $n=0$ avem $C=2^3+7=15$ care nu este pătrat perfect.

2. Fie fracția căutată de forma $\frac{x}{15}$ cu proprietatea $\frac{9}{11}<\frac{x}{15}<\frac{10}{11}$.

Atunci $\frac{9\cdot 15}{11\cdot 15}<\frac{11\cdot x}{11\cdot 15}<\frac{10\cdot 15}{11\cdot 15}$, de unde $135<11x<150$

cu soluţia x=13, deci fracţia căutată este $\frac{13}{15}$.

3. Fie x numărul de zile în care a plouat dimineaţa şi y numărul de zile în care a plouat după-masa. Atunci x+y=12 şi x+9=y+7 adică y=x+2 şi avem x=5 şi y=7. Deci observaţii s-au făcut în 14 zile.

4. $(a,b)\cdot 4=[a,b]$ iar $(a,b)\cdot[a,b]=a\cdot b\Rightarrow$

$$4\cdot((a,b))^2=a\cdot b\Rightarrow 4\cdot((a,b))^2=1600\Rightarrow(a,b)=20$$

şi $[a,b]=80\Rightarrow a=20$ şi $b=80$ sau $a=80$ şi $b=20$

CLASA a VI-a

1. Fie $\frac{a+1990}{1990}=\frac{b+1991}{1991}=\frac{c+1992}{1992}=k$

   Atunci avem a=1990(k-1); b=1991(k-1) şi c=1992(k-1)
   de unde 1990(k-1)+1991(k-1)=2·1992(k-1)-3 sau
   (k-1)(1990+1991)-2·1992(k-1)=-3 ⇒
   (k-1)(1990+1991-2·1992)=-3 ⇒
   (k-1)(-3)=-3 ⇒ k-1=1 ⇒ k=2
   Deci a=1990, b=1991 şi c=1992.

2. Soluţia I.
   Folosind inegalitatea dintre media pătratică şi cea aritmetică avem: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge\frac{a+b}{2}\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$

   În cazul nostru avem:

$$\sqrt{2x^2+5x}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2x}+\sqrt{5x}\right);\sqrt{2y^2+5y}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2y}+\sqrt{5y}\right);$$

$$\sqrt{2z^2+5z}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2z}+\sqrt{5z}\right),\text{ de unde}$$

$$\sqrt{2x^2+5x}+\sqrt{2y^2+5y}+\sqrt{2z^2+5z}\ge(x+y+z)+\frac{\sqrt{10}}{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)=$$

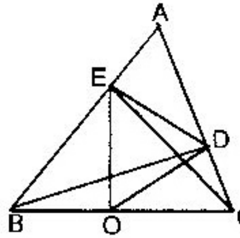
$$=10+\frac{\sqrt{10}}{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)>9$$

Deci $\sqrt{2x^2+5x}+\sqrt{2y^2+5y}+\sqrt{2z^2+5z}\ge 9$ pentru $x,y,z\in\mathbb{Q}_+^*$ şi x+y+z=10.

Soluţia a II-a.

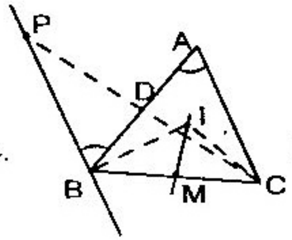
Deoarece x,y,z≥0 avem $\sqrt{2x^2+5x}\ge\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}x$ şi analoagele, deci

$$\sqrt{2x^2+5x}+\sqrt{2y^2+5y}+\sqrt{2z^2+5z}\ge\sqrt{2}(x+y+z)=10\sqrt{2}>9.$$

3. 

a) În triunghiul BDC cu m(∢BDC)=90°, OD este mediană şi $OD=\frac{1}{2}BC=OC$. La fel în ΔCEB cu m(∢CEB)=90°, OE este mediană şi $OE=\frac{1}{2}BC=BO$. Rezultă că EO=DO şi ΔOCD este isoscel cu OC=OD, de unde m(∢DOC)=180°-2m(∢C). La fel ΔBOD este isoscel cu EO=OB şi m(∢BOE)=180°-2m(∢B).
Atunci m(∢BOE)+m(∢EOD)+m(∢DOC)=180°,
de unde: m(∢EOD)=180°-(180°-2m(∢B))-(180°-2m(∢C))= =2m((∢B)+m(∢C))-180°=2(180°-m(∢A))-180°=2·120°-180°=60°. Deci ΔEOD este isoscel cu unghiul de la vârf cu măsura de 60°, adică este echilateral.

b) Cum $DO=OE=\frac{1}{2}BC$, latura triunghiului OED este minimă dacă latura [BC], a triunghiului ABC, are lungime minimă. Cum AC este constantă şi m(∢BAC)=60° rezultă că BC este minimă pentru BC'⊥AB, adică ΔABC este dreptunghic cu m(∢ABC)=90°.



4. Fie D mijlocul laturii AB. Atunci CD=DP

şi DA=DB. Rezultă că $\Delta BDP \equiv \Delta ADC$, deoarece $\sphericalangle BDP \equiv \sphericalangle ADC$, ca opuse la vârf. Atunci $\sphericalangle PBA \equiv \sphericalangle CAD$, de unde rezultă că PB II AC. Dacă IM II PB, rezultă IM II AC şi considerând secantă pe IC am avea $m(\sphericalangle ACI)=m(\sphericalangle CIM)$, ca alterne interne. Cum (IC este bisectoarea unghiului ACB avem atunci $m(\sphericalangle CIM)=m(\sphericalangle MCI)$ de unde MC=MI=MB, adică ΔBIC este dreptunghic cu $m(\sphericalangle BIC)=90^0$, de unde rezultă că

$\frac{1}{2}(m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle C))=90^0$, adică ΔBIC este dreptunghic cu

$m(\sphericalangle BIC)=90^0$, de unde rezultă că $\frac{1}{2}(m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle C))=90^0$,

adică $m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle C)=180^0$ absurd.
Deci nu este posibil ca IM II BP.

CLASA a VII-a

1. $27!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdots10\cdots15\cdots20\cdots25\cdot26\cdot27$, deci conţine în descompunere pe 5^6 şi $10^6|27!$.

Atunci a=8 şi $m=2^{8-7}+3^{8-6}=2+3^2=11$. Ecuaţia devine:

$$\frac{x+11}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{x+11}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{x+11}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{x+11}{\sqrt{9}+\sqrt{8}}=2\cdot11^3+10\cdot11^2+134$$

sau:

$$(x+11)\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}}\right)=2\cdot11^3+10\cdot11^2+134\Rightarrow$$

$$(x+11)\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3}+\dots+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{9-8}\right)=2\cdot11^3+10\cdot11^2+134\Rightarrow$$

$$(x+11)\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\dots+\sqrt{9}-\sqrt{8}\right)=2\cdot11^3+10\cdot11^2+134\Rightarrow$$

$$(x+11)\cdot2=2\cdot11^3+10\cdot11^2+134\Rightarrow x+11=11^3+5\cdot11^2+67\Rightarrow$$

$$x=11^3+5\cdot11^2+56=11^2(11+5)+56=16\cdot11^2+56=16\cdot11^2+56=$$

$$=8\cdot\left(2\cdot11^2+7\right)=8(2\cdot121+7)=8\cdot249=1992$$

deci soluţia ecuaţiei este x=1992.

2. Pentru n=2k avem:

$$16k^2+10k+7=\left(16k^2+8k\right)+2k+7=\mathcal{M}_8+2k+7$$

Cum 2k+7 este număr impar pentru $(\forall)k\in\mathbf{N}^*$ rezultă că:

$4n^2+5n+7$ nu se divide cu 8.

Pentru n=2k+1 avem: $4(2k+1)^2+5(2k+1)+7=$

$=16k^2+16k+4+10k+5+7=(16k^2+24k+16)+2k=\mathcal{M}_8+2k$

care este multiplu de 8 pentru $k=4l$, $l\in\mathbf{N}$. Deci pentru $n=8l+1$ cu $l\in\mathbf{N}$ numărul $4n^2+5n+7$ se divide cu 8.

3. Presupunem $\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$ şi demonstrăm egalitatea $\sqrt{aa_1}+\sqrt{bb_1}+\sqrt{cc_1}=2\sqrt{pp_1}$.

Din asemănarea celor două triunghiuri avem:

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k \text{ de unde } a=ka_1;\ b=kb_1;c=kc_1.$$

Atunci $\sqrt{aa_1}+\sqrt{bb_1}+\sqrt{cc_1}=\sqrt{ka_1^2}+\sqrt{kb_1^2}+\sqrt{kc_1^2}=$

$$=\sqrt{k}(a_1+b_1+c_1)=\sqrt{k(a_1+b_1+c_1)^2}=\sqrt{(ka_1+kb_1+kc_1)(a_1+b_1+c_1)}=$$

$$=\sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}=\sqrt{2p\cdot2p_1}=2\sqrt{pp_1}.$$

Reciproc, dacă $\sqrt{aa_1}+\sqrt{bb_1}+\sqrt{cc_1}=2\sqrt{pp_1}$ dovedim că: $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$.

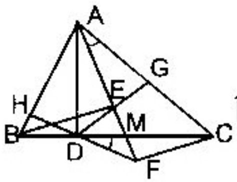
Egalitatea se mai scrie:

$$\sqrt{aa_1}+\sqrt{bb_1}+\sqrt{cc_1}=\sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}$$

$$\left(\sqrt{aa_1}+\sqrt{bb_1}+\sqrt{cc_1}\right)^2=(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)\Rightarrow$$

$$aa_1+bb_1+cc_1+2\sqrt{aa_1bb_1}+2\sqrt{aa_1cc_1}+2\sqrt{bb_1cc_1}=$$
$$=aa_1+ab_1+ac_1+ba_1+bb_1+bc_1+ca_1+cb_1+cc_1 \Rightarrow$$
$$\left(\sqrt{ab_1}-\sqrt{a_1b}\right)^2+\left(\sqrt{ac_1}-\sqrt{a_1c}\right)^2+\left(\sqrt{bc_1}-\sqrt{b_1c}\right)^2=0$$
$$\Rightarrow \sqrt{ab_1}-\sqrt{a_1b}=0;\sqrt{ac_1}-\sqrt{a_1c}=0;\sqrt{bc_1}-\sqrt{b_1c}=0$$
deoarece: $a;b;c;a_1;b_1;c_1\in \mathbf{R}_+^*$.
Atunci $ab_1=a_1b$; $ac_1=a_1c$; $bc_1=b_1c$ sau:

$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1};\frac{a}{a_1}=\frac{c}{c_1};\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$ de unde $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$ și rezultă că: $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$.



4. În patrulaterul ABDE avem $AD\perp BD$ și $BE\perp AE$ de unde rezultă că acesta este inscriptibil și $m(\sphericalangle BDE)+m(\sphericalangle BAE)=180^0$. În patrulaterul ADFC avem $AD\perp DC$ și $CF\perp AF$, de unde rezultă că patrulaterul este inscriptibil și $m(\sphericalangle CDF)=m(\sphericalangle CAF)$.
Dar $m(\sphericalangle CDF)=m(\sphericalangle BDH)$, ca opuse la vârf.
Atunci: $m(\sphericalangle HDG)+m(\sphericalangle HAG)=$
$=m(\sphericalangle BDE)-m(\sphericalangle BDH)+m(\sphericalangle BAE)+m(\sphericalangle FAC)=m(\sphericalangle BDE)-m(\sphericalangle CDF)+m(\sphericalangle BAE)+m(\sphericalangle CDF)=m(\sphericalangle BDE)+m(\sphericalangle BAE)=180^0$, de unde rezultă că patrulaterul AHDG este inscriptibil.

CLASA a VIII-a

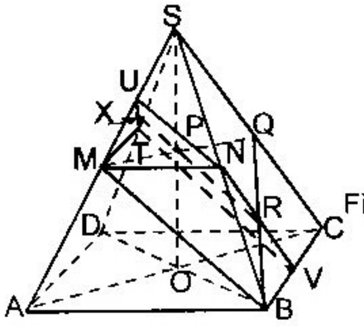
1. Notăm $5x+y+z=7A$; $x+5y+z=7B$; $x+y+5z=7C$ și obținem: $7(x+y+z)=7(A+B+C)$, de unde $x+y+z=A+B+C$ și avem:
$$x=\frac{6A-B-C}{4};y=\frac{6B-A-C}{4};z=\frac{6C-A-B}{4}.$$
În acest caz inegalitatea cerută devine:

$$\frac{6A-B-C}{4\cdot 7A}+\frac{6B-A-C}{4\cdot 7B}+\frac{6C-A-B}{4\cdot 7C}\le\frac{3}{7}\Leftrightarrow$$
$$\frac{6A-B-C}{A}+\frac{6B-A-C}{B}+\frac{6C-A-B}{C}\le 12\Leftrightarrow$$
$$6-\frac{B}{A}-\frac{C}{A}+6-\frac{A}{B}-\frac{C}{B}+6-\frac{A}{C}-\frac{B}{C}\le 12\Leftrightarrow$$
$$18-\left(\frac{B}{A}+\frac{A}{B}+\frac{C}{A}+\frac{A}{C}+\frac{B}{C}+\frac{C}{B}\right)\le 12\Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{B}{A}+\frac{A}{B}\right)+\left(\frac{C}{A}+\frac{A}{C}\right)+\left(\frac{B}{C}+\frac{C}{B}\right)\ge 6$$
Folosind inegalitatea mediilor avem:
$\frac{B}{A}+\frac{A}{B}\ge 2;\frac{C}{A}+\frac{A}{C}\ge 2;\frac{B}{C}+\frac{C}{B}\ge 2$ de unde rezultă adevărată inegalitatea $\left(\frac{B}{A}+\frac{A}{B}\right)+\left(\frac{C}{A}+\frac{A}{C}\right)+\left(\frac{B}{C}+\frac{C}{B}\right)\ge 6$.

2. Din ecuația a doua avem $x=y+z-3$ și sistemul devine:
$$\begin{cases}x^2-y^2-z^2=1\\ x=y+z-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y+z-3)^2-y^2-z^2=1\\ x=y+z-3\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}y^2+z^2+9+2yz-6y-6z-y^2-z^2=1\\ x=y+z-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2yz-6y-6z+9=1\\ x=y+z-3\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}yz-3y-3z+4=0\\ x=y+z-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(y-3)(z-3)-5=0\\ x=y+z-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(y-3)(z-3)=5\\ x=y+z-3\end{cases}$$
Cum $x,y,z\in\mathbf{Z}$, din ecuația $(y-3)(z-3)=5$ avem:
$$\begin{cases}y-3=1\\ z-3=5\end{cases}\text{sau}\begin{cases}y-3=-1\\ z-3=-5\end{cases}\text{sau}\begin{cases}y-3=5\\ z-3=1\end{cases}\text{sau}\begin{cases}y-3=5\\ z-3=-1\end{cases}$$
cu soluțiile:
$$\begin{cases}y=4\\ z=8\end{cases}\text{sau}\begin{cases}y=2\\ z=-2\end{cases}\text{sau}\begin{cases}y=8\\ z=4\end{cases}\text{sau}\begin{cases}y=-2\\ z=2\end{cases}$$

Cum $x=y+z-3$, atunci sistemul dat are soluțiile:

$\begin{cases} x=9 \\ y=4 \\ z=8 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \\ z=-2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x=9 \\ y=8 \\ z=4 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \\ z=2 \end{cases}$

3. 

Fie Q mijlocul lui [SC] și R mijlocul lui [BQ]. Atunci în ΔMQB segmentul [PR] este linie mijlocie și PR II BM. Dacă T este mijlocul lui [SD] și V mijlocul lui [BC], atunci BMTV este paralelogram și MB II TV. Cum PR II BM, rezultă că PR II TV. Fie B mijlocul lui [SM]; atunci în ΔSMU segmentul [NU] este linie mijlocie și NU II MB, $NU=\frac{1}{2}MB$.

Atunci TVNU este un trapez și PR II TV II UN II MB. În ΔSBC avem [NV] linie mijlocie și [BQ] mediană, deci și NR=RV.

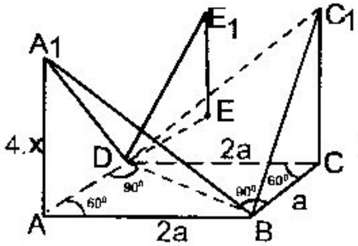
Cum PR este paralelă cu bazele trapezului TVNU și R este mijlocul laturii [NV] înseamnă că dreapta PR trece și prin mijlocul segmentului [TU] notat cu X și segmentul [RX] este lungimea paralelei la MB ce trece prin mijlocul lui [SO]. ΔSBA este dreptunghic în B, deoarece $SA^2=SB^2+AB^2$, adică $10^2=8^2+6^2$.

Segmentul [BM] fiind mediană în ΔSBA dreptunghic în B are lungimea BM=5cm. Apoi în ΔSNM, dreptunghic în N, deoarece MN II AB, segmentul [NU] este mediană și avem $NU=\frac{5}{2}$ cm.

Cum segmentul [RX] este linie mijlocie în trapezul TVNU rezultă

că $RX=\frac{1}{2}(TV+NU)$ de unde obținem RX=3,75 cm.

Deci lungimea segmentului situat pe paralela dusă prin mijlocul segmentului [SO] la mediana [BM] și situat în interiorul piramidei este RX=3,75 cm.

4. 

În ΔABD și ΔBCD avem AB=CD=2a, BC=AD=a și $m(\sphericalangle BAD)=m(\sphericalangle BCD)=60^0$ de unde rezultă că $m(\sphericalangle ADB)=m(\sphericalangle DBC)=90^0$, adică $AD\perp BD$ și $BC\perp BD$.

Atunci din $A_1A\perp(ABD)$, $AD\perp BD$ rezultă $A_1D\perp BD$. Construim $E\in AD$ astfel încât $D\perp(AE)$ și DE=a, iar $EE_1\perp(ABD)$ cu $EE_1=a\sqrt{3}$.

Cum $EE_1\perp(ABD)$, $ED\perp BD$ rezultă că $E_1D\perp BD$ și $C_1C\perp(ABD)$, $CB\perp BD$ rezultă că $C_1B\perp BD$.

Cum C_1C II E_1E și DE II BC rezultă că (E_1ED) II (C_1CB) și cum $E_1D\subset(E_1ED)$ și $C_1B\subset(C_1CB)$ avem E_1D II C_1B și $E_1D\subset(C_1BD)$. Atunci unghiul plan al diedrului cu fețele (A_1BD) și (C_1BD) este $\sphericalangle A_1DE_1$.

Dar în ΔE_1ED avem $tg(\sphericalangle E_1DE)=\frac{a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}$ de unde $m(\sphericalangle E_1DE)=60^0$. Dacă $m(\sphericalangle E_1DA)=90^0$, atunci $m(\sphericalangle A_1DA)=30^0$ și în ΔA_1AD avem $tg30^0=\frac{x}{a}$, adică $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{x}{a}$, de unde $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Deci pentru $AA_1=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ avem $(A_1BD)\perp(C_1BD)$.

EDIȚIA a VI-a, HUNEDOARA - 1992

CLASA a IX-a

1. Să se arate că valoarea minimă a funcției:

   $f:[0,c]x[0,d] \to \mathbf{R}$,

   $$f(x,y)=\sqrt{a^2+(c-x)^2}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{b^2+(d-y)^2}$$

   unde $a,b,c,d, \in \mathbf{R}_+^*$ se obține pentru $\frac{x}{y}=\frac{b+c}{a+d}$.
2. Să se determine funcțiile $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pentru care $f(x+y)=\max(f(x),y)+\min(f(y),x), (\forall)x,y \in \mathbf{R}$.
3. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza de lungime 1. Ce valori poate lua perimetrul său?
4. În exteriorul triunghiului ascuțitunghic ABC se construiesc triunghiurile echilaterale ABD, BCE și ACF de centre C_1, A_1, B_1, respectiv. Perpendiculara din B pe A_1C_1 intersectează A_1C_1 în B_2. Analog se obțin punctele A_2 și C_2. Demonstrați că $C_1B_2+A_1C_2+B_1A_2=A_2C_1+B_2A_1+C_2B$.

CLASA a X-a

1. Să se rezolve sistemul:

   $$\begin{cases} 2^x+y+\log_2 z=6+\sqrt{2-x} \\ 2^y+z+\log_2 x=5+\sqrt{1-y} \\ 2^z+x+\log_2 y=6+\sqrt{2-z} \end{cases}$$

2. Fie punctele A,B,C având abscisele $a,b,c, \in \mathbf{C}$ astfel încât $|a|=|b|=|c|=1$ și $a+b+c=abc \in \mathbf{R}$. Ce fel de triunghi este ABC?
3. Fie ABCD un tetraedru. Semiplanele bisectoare ale

unghiurilor diedre de muchii (AB), (AC) respectiv (AD) intersectează muchiile opuse în B',C' respectiv D'.

a) Să se arate că dreptele BB', CC', DD' sunt concurente.

b) Dacă notăm $\{E\}=BB'\cap CC'\cap DD'$ şi

$s_1 = A_{[ABC]}; s_2 = A_{[ACD]}; s_3 = A_{[ABD]}$ să se arate că

$$AE < \frac{s_1}{s_1+s_2+s_3}AD + \frac{s_2}{s_1+s_2+s_3}AB + \frac{s_3}{s_1+s_2+s_3}AC.$$

D. Şt. Marinescu

4. Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă şi numai dacă

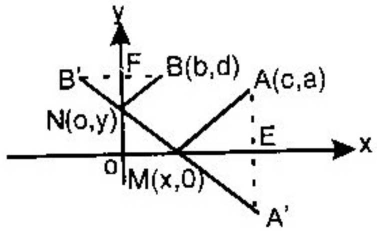
$$\sqrt{\frac{p-b}{p-c}} + \sqrt{\frac{p-c}{p-b}} = \sqrt{\frac{p}{p-a}} - \sqrt{\frac{p-a}{p}}.$$

5. Să se determine toate numerele prime cu scrierea zecimală de forma 101010...0101.

SOLUȚII

EDIȚIA a VI-a 1992 HUNEDOARA

CLASA a IX-a

1. 

Din ipoteză $a,b,c,d\in \mathbf{R}_+^*$, $x\in[0,c]$ şi $y\in[0,d]$.
Fie xoy un sistem de axe de coordonate ortogonale în care considerăm punctele A(c,a), M(x,o), N(o, y) şi B(b,d).
Atunci:

$$AM+MN+NB = \sqrt{(c-x)^2+a^2}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{b^2+(d-y)^2}\,.$$

Construim simetricul lui A față de Ox în punctul A' şi simetricul lui B față de Oy în punctul B'.
Dreapta $A'B'\cap Ox=\{M\}$ şi $A'B'\cap Oy=\{N\}$.
Din simetrie avem $A'B'=A'M+MN+NB'=AM+MN+NB$.

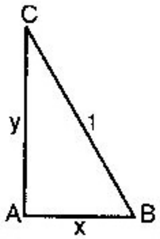
Din $\Delta NOM\sim\Delta A'EM$ obținem $\frac{x}{y}=\frac{c-x}{a}$ şi din $\Delta NOM\sim\Delta NFB'$ obținem $\frac{x}{y}=\frac{b}{d-y}$, de unde

$$\frac{x}{y}=\frac{c-x}{a}=\frac{b}{d-y}=\frac{b+c}{a+d}\text{ c.c.t.d.}$$

2. Folosim relația max(x,y)+min(x,y)=x+y.
Dacă în condiția din enunț schimbăm pe x cu y obținem f(y,x)=max(f(y),x)+min(f(x),y), pe care adunând-o cu relația din enunț avem:

$f(x+y)=x+y+f(x)+f(y)$.
Pentru $y=0$ obținem $f(x)=x+f(0)$. Notând $f(0)=a\in\mathbf{R}$ avem $x+y+a=\max(x+a,y)+\min(y+a,x)$.
Pentru $x=0$ și $y=-a$ obținem:
$0=\max(a,-a)+\min(0,0)$, de unde $a=0$.
Funcția căutată este $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x$.

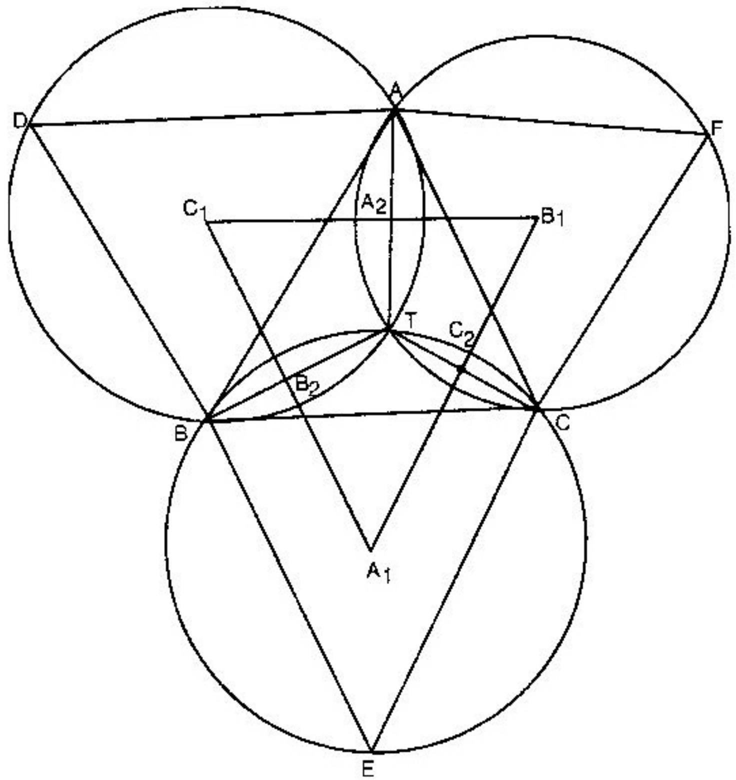
3.



Fie $AB=x$ și $AC=y$.
Atunci perimetrul este $P(x,y)=1+x+y$.
Din inegalitatea fundamentală din triunghi avem $x+y>1$ și $P(x,y)>2$.
Folosind teorema lui Pitagora în triunghiul ABC avem $x^2+y^2=1$.
Din inegalitatea lui Cauchy- Buniacovski rezultă:
$(x^2+y^2)(1^2+1^2)>(x+y)^2$, adică $x+y<\sqrt{2}$.
Atunci $1+x+y<1+\sqrt{2}$ și $2<P(x,y)<1+\sqrt{2}$.

4. Fie T punctul de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD și respectiv ACF. Atunci patrulaterele ATBD și ATCF sunt inscriptibile și $m(\sphericalangle ATB)=m(\sphericalangle ATC)=120^0$ deoarece $m(\sphericalangle D)=m(\sphericalangle F)=60^0$. Rezultă că $m(\sphericalangle BTC)=120^0$ și $m(\sphericalangle BTC)+m(\sphericalangle BEC)=180^0$, de unde patrulaterul BTCE este inscriptibil și cercul circumscris lui trece prin T. AT, BT și CT sunt coarde comune ale cercurilor de centre C_1 și B_1, C_1 și A_1, respectiv A_1 și B_1. Liniile centrelor cercurilor respective au proprietatea că sunt perpendiculare pe coarda comună. Deci $AT\perp C_1B_1$, $BT\perp C_1A_1$ și $CT\perp A_1B_1$. Atunci $C_1B_1\cap AT=\{A_2\}$, $C_1A_1\cap BT=\{B_2\}$ și $A_1B_1\cap CT=\{C_2\}$.
În acest caz patrulaterele $A_2TB_2C_1$, $B_2TC_2A_1$ și $C_2TA_2B_1$ sunt inscriptibile.
Cum $m(\sphericalangle A_2TB_2)=m(\sphericalangle B_2TC_2)=m\sphericalangle(C_2TA_2)=120^0$ rezultă că

$m(\sphericalangle A_1)=m(\sphericalangle B_1)=m(\sphericalangle C_1)=60^0$ și triunghiul $A_1B_1C_1$ este echilateral. Din T avem perpendicularele $TA_2\perp B_1C_1$, $TB_2\perp C_1A_1$ și $TC_2\perp A_1B_1$.



Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice formate, rezultă:
$A_1C_2^2+C_2T^2=A_1T^2$, $B_1C_2^2+C_2T^2=B_1T^2$ de unde
$A_1C_2^2-B_1C_2^2=A_1T^2-B_1T^2$ și analoagele:
$B_1A_2^2-C_1A_2^2=B_1T^2-C_1T^2$

$C_1B_2^2 - A_1B_2^2 = C_1T^2 - A_1T^2$.

Prin însumare obținem:

$A_1C_2^2 - B_1C_2^2 + B_1A_2^2 - C_1A_2^2 + C_1B_2^2 - A_1B_2^2 = 0$ (lema lui Carnot).

Relația mai poate fi scrisă:

$$(A_1C_2 - B_1C_2)(A_1C_2 + B_1C_2) + (B_1A_2 - C_1A_2)(B_1A_2 + C_1A_2) + (C_1B_2 - A_1B_2)(C_1B_2 + A_1B_2) = 0$$

sau:

$$(A_1C_2 - B_1C_2)A_1B_1 + (B_1A_2 - C_1A_2)B_1C_1 + (C_1B_2 - A_1B_2)A_1C_1 = 0$$

Dar $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1$ ca laturi ale triunghiului echilateral.

Deci $A_1C_2 + B_1A_2 + C_1B_2 = B_1C_2 + C_1A_2 + A_1B_2$ c.c.t.d.

CLASA a X-a

1. Din condițiile de existență pentru logaritmi și radicali obținem: $x \in (0,2]; y \in (0,1]$ și $z \in (0,2]$. Intuim că x=2; y=1; z=2 este soluție. Să dovedim că este unică. Presupunem că există $x_0 \in (0,2); y_0 \in (0,1)$ și $z_0 \in (0,2)$ care să fie soluție a sistemului.
Din monotonia funcțiilor exponențiale, logaritmice și radical obținem:
$x_0 < 2 \Rightarrow 2^{x_0} < 2^2; z_0 < 2 \Rightarrow \log_2 z_0 < \log_2 2$ de unde
$2^{x_0} + y_0 + \log_2 z_0 < 2^2 + 1 + 1 = 6$.
Apoi $x_0 < 2 \Rightarrow 2 - x_0 > 0 \Rightarrow \sqrt{2-x_0} > 0$ și $6 + \sqrt{2-x_0} > 6$ și am obținut contradicție.
Deci unica soluție a sistemului este x=2; y=1;z=2.

2. Din $|a| = |b| = |c| = 1$ obținem $\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}, \bar{c} = \frac{1}{c}$.
Dacă $a+b+c \in \mathbf{R}$ rezultă $\overline{a+b+c} \in \mathbf{R}$ și
$$a+b+c = \overline{a+b+c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc}$$

sau $a+b+c = \frac{ab+bc+ca}{abc}$ (1).

Din $abc \in \mathbf{R}$ rezultă $\overline{abc} \in \mathbf{R}$ și $abc = \overline{abc} = \frac{1}{abc}$ sau

$(abc)^2 = 1$

de unde abc=1 sau abc=-1.

Notăm $S_1=a+b+c$
$S_2=ab+bc+ac$
$S_3=abc$

Din (1) obținem $S_1S_3=S_2$.

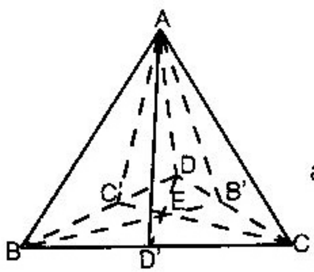
Fie ecuația $t^3 - s_1t^2 + s_2t - s_3 = 0$ cu rădăcinile a,b,c.

Deosebim cazurile:

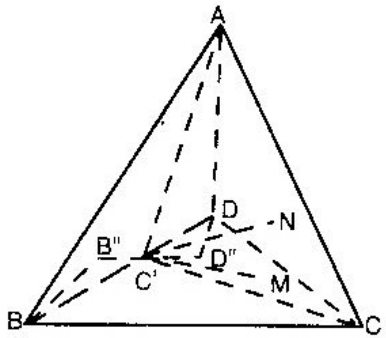
i) $S_3=1$, $S_1=S_2$, $S_1=S_3$ și ecuația $t^3 - t^2 + t - 1 = 0$ are soluțiile (1,i,-i) și triunghiul ABC este dreptunghic isoscel cu unghiul drept în A(1).

ii) $S_3=-1$, $S_2=-S_1$, $S_3=S_1$ și $t^3 + t^2 + t + 1 = 0$ are soluția (-1,i,-i) și triunghiul ABC este dreptunghic isoscel cu unghiul drept în A(-1).

3.



a) Dovedim că punctele B', C', D' împart muchiile [CD], [BD] și [BC] în părți proporționale cu ariile fețelor alăturate. Demonstrăm proprietatea pentru punctul C', celelalte dovedindu-se în mod analog.
Distanțele $C'M$ și $C'N$ ale punctului C' la planele (ABC) și (ACD) sunt egale, C' aparținând semiplanului bisector. Fie B'' și D'' proiecțiile punctelor B și D pe planul bisector (ACC'). Punctele B'', C', D'' sunt coliniare deoarece proiecția segmentului [BD] pe planul (ACC') este tot un segment.



Avem:

$Vol(BACC') = \frac{1}{3} s(ACC')BB'' = \frac{1}{3} s(ABC)C'M$

$Vol(DACC') = \frac{1}{3} s(ACC')DD'' = \frac{1}{3} s(ACD)C'N$

de unde rezultă că $\frac{BB''}{DD''} = \frac{\sigma(ABC)}{\sigma(ACD)}$.

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice $BB''C'$ și $DD''C'$ avem $\frac{BB''}{DD''} = \frac{BC'}{DC'}$ de unde $\frac{BC'}{DC'} = \frac{\sigma(ABC)}{\sigma(ACD)}$ (1).

Analog obținem $\frac{B'D}{B'C} = \frac{\sigma(ABD)}{\sigma(ABC)}$ (2) și $\frac{D'C}{D'B} = \frac{\sigma(ADC)}{\sigma(ABD)}$ (3).

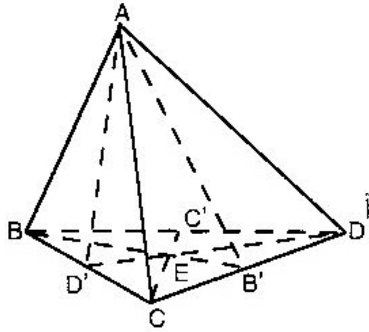
Din (1), (2) și (3) avem

$\frac{BC'}{DC'} \cdot \frac{B'D}{B'C} \cdot \frac{D'C}{D'B} = \frac{\sigma(ABC)}{\sigma(ADC)} \cdot \frac{\sigma(ABD)}{\sigma(ABC)} \cdot \frac{\sigma(ADC)}{\sigma(ABD)} = 1$ și din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că BB', CC', DD' sunt concurente.

b) Folosind în triunghiul BCD relația lui van Aubel obținem:

$\frac{BE}{EB'} = \frac{BC'}{C'D} + \frac{BD'}{D'C} = \frac{s_1}{s_2} + \frac{s_3}{s_2} = \frac{s_1 + s_3}{s_2}$ de unde

$\frac{BE}{BB'} = \frac{s_1 + s_3}{s_1 + s_2 + s_3}$ (1).



În triunghiul ABB' o consecință a inegalității lui Ptolemeu ne conduce la inegalitatea:

$AE \cdot BB' < AB \cdot EB' + AB' \cdot BE$ sau

$AE < \frac{BE}{BB'} AB' + \frac{EB'}{BB'} AB$

Folosind (1) obținem:

$AE < \frac{s_1 + s_3}{s_1 + s_2 + s_3} AB' + \frac{s_2}{s_1 + s_2 + s_3} AB$ (2).

Aceeași inegalitate în triunghiul ACD ne dă

$AB' \cdot CD < AC \cdot B'D + AD \cdot CB'$ sau

$AB' < \frac{CB'}{CD} AD + \frac{B'D}{CD} AC$.

Din proprietatea de la punctul a) avem:

$\frac{CB'}{B'D} = \frac{s_1}{s_3}$ de unde $\frac{B'D}{CD} = \frac{s_3}{s_1 + s_3}$ și $\frac{CB'}{CD} = \frac{s_1}{s_1 + s_3}$.

De aici avem $AB' < \frac{s_1}{s_1 + s_3} AD + \frac{s_3}{s_1 + s_3} AC$ (3).

Din (2) și (3) rezultă:

$AE < \frac{s_1}{s_1 + s_2 + s_3} AD + \frac{s_2}{s_1 + s_2 + s_3} AB + \frac{s_3}{s_1 + s_2 + s_3} AC$.

4. Egalitatea dată se mai poate scrie:

$$\frac{p-b+p-c}{\sqrt{(p-b)(p-c)}}=\frac{p-p+a}{\sqrt{p(p-a)}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2p-b-c}{\sqrt{(p-b)(p-c)}}=\frac{a}{\sqrt{p(p-a)}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{\sqrt{(p-b)(p-c)}}=\frac{a}{\sqrt{p(p-a)}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(p-b)(p-c)=p(p-a)\Leftrightarrow p^2-p(b+c)+bc=p^2-pa\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2-p(2p-a)+bc=p^2-pa\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2-2p^2+pa+bc=p^2-pa\Leftrightarrow pa+bc-2p^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{2}\cdot a+bc-2\frac{(a+b+c)^2}{4}=0\Leftrightarrow$$

$$2\left(a^2+ab+ac+bc\right)-(a+b+c)^2=0\Leftrightarrow$$

$$2a^2+2ab+2ac+2bc-a^2-b^2-c^2-2ab-2ac-2bc=0$$

$$\Leftrightarrow a^2-b^2-c^2=0\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2\Leftrightarrow$$

ΔABC este dreptunghic în A.

5. Considerăm polinomul:

$P(X)=1+X^2+X^4+...+X^{2n}$ și avem:

$$(X+1)P(X)=1+X+X^2+...+X^n+X^{n+1}+...+X^{2n+1}=$$

$$=\left(1+X+...+X^n\right)\left(1+X^{n+1}\right)$$

Pentru n par P(X) este divizibil cu $1+X+X^2+...+X^n$ și P(10) este număr compus, iar pentru n impar și diferit de 1, P(X) este divizibil cu X^2+1.

În particular P(10) este un număr compus, divizibil cu 101, când n este impar.

Deducem că singurul număr de forma din enunț care poate fi prim este 101 și acesta este număr prim.

Clasa a XI-a

1. Fie a, b, c, d, $\in$ **R**, $a < b < c < d$ şi funcţia $f : [a, b] \to [c, d]$ astfel încât $(\forall)\ y \in [c, d]$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$, $(\exists)\ x \in [a, b]$ cu $|f(x) - y| \le \frac{1}{n}$

a) Să se arate că dacă f este continuă atunci ea este surjectivă.

b) Să se dea un exemplu de funcţie cu proprietatea de mai sus nesurjectivă.

* * *

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(C)$ cu proprietăţile: $A^2 = B^3 = I_n$, $AB = BA$. Să se arate că $I_n + A + B$ este inversabilă.

* * *

3. Fie punctele A(2a, 0), B(0, 2b) şi M mobil pe dreapta de ecuaţie $bx + ay - - ab = 0$. Se cere:

(i) Ecuaţia locului geometric al centrului de greutate al ΔABM.

(ii) Poziţia punctului M pentru care AM + BM este minim.

* * *

4. Fie $a_n > 0$ şi $x \in \mathbf{R}$ astfel încât $n^x a_n \to a \in (0, +\infty)$. Să se determine limita şirului $n^x \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$.

* * *

Clasa a XII-a

1. Fie S o mulţime nevidă, (G, +) un grup comutativ, $f : S \to G$ o funcţie bijectivă şi $a \in G$. Să se arate că aplicaţia $\varphi : S \times S \to S$ definită prin $\varphi(x, y) = f^{-1}[f(x) + f(y) + a]$ este o lege de compoziţie pe S şi că (S, φ) este un grup comutativ.

* * *

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu n elemente, $n \in \mathbf{N}^*$, $f : G \to G$ o funcţie astfel încât mulţimea

$$H = \{y \in G : f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \text{ pentru orice } x \in G\}$$

are mai mult de $\frac{n}{2}$ elemente. Să se arate că f este morfism de grupuri.

* * *

3. Aflați partea întreagă a numărului real: $A = \int_2^3 \frac{x}{\ln x} dx$

* * *

4. Să se arate că ecuația: $\sin x^2 \cdot \int_x^{\frac{\pi}{2}} e^{t^2} dt - e^{x^2} \cdot \int_0^x \sin t^2 dt = 0$ are cel puțin o soluție în $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

M. Neacșu, Caransebeș

5. Construiți o funcție $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ cu proprietățile:
   (i) f este integrabilă pe $[n, n+1]$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$;
   (ii) $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = \infty$; (iii) $\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx = 0$

EDIȚIA a VI-a - HUNEDOARA - 1992

Clasa a XI-a

1. a) Fie $y \in [c, d]$ și $n \in \mathbf{N}^*$ oarecare. Atunci există $x_n \in [a, b]$ astfel încât $|f(x_n) - y| \le \frac{1}{n}$. Cum $(x_n)_{n\ge1}$ este mărginit, el are un subșir (x_{n_k}) convergent la $x_0 \in [a, b]$ și deci $|f(x_0) - y| \le 0 \Rightarrow f(x_0) = y$. În acest caz $f([a, b]) = [c, d]$ și funcția f este surjectivă pe [a, b].

b) Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \ne \frac{1}{2} \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$

care are proprietatea din enunț, dar nu este surjectivă.

2. Din $B^3 = I_n \Rightarrow B = (B^{-1})^2$. Atunci

$$\det(A + B + I_2) = \frac{1}{2^n}\det(2A + 2B + 2I_n) = \frac{1}{2^n}\det(A^2 + 2A + I_n + 2B) =$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[\det(A + I_n)^2 + 2B\right] = \frac{1}{2^n}\left[\det(A + I_n)^2 + \left(\sqrt{2}B^{-1}\right)^2\right] \ge 0 \text{ deoarece}$$

$(A + I_n)B^{-1} = B^{-1}(A + I_n)$ sau $B(A + I_n) = (A + I_n)B$ sau $BA = AB$.

Presupunem că $\det(A + B + I_n) = 0$. Atunci sistemul $(A + B + I_n)X = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (A + I_n)X = -BX$ admite soluții diferite de soluția banală.
$-B^3X = B^2(-BX) = B^2(A + I_n)X = B(A + I_n)BX = B^{-1}(A + I_n)^2X = (A + I_n)^3X$

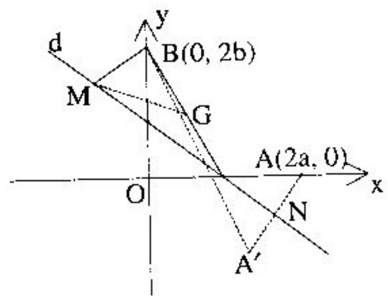
Cum $B_3 = I_n \Rightarrow (A + I_n)^3X = -X$ sau $[(A + I_n)^3 + I_n]X = 0$ și $(A^2 - I_n)X = 0$

Fie $f, g \in \mathbf{C}[X]$, $f = (X + 1)^3 + 1$, $g = X^2 - 1$.

Din $g = 0 \Rightarrow x = \pm 1$; $f(\pm1) = (1 \pm 1)^3 + 1 \ne 0$. Rezultă că $(f, g) = 1$. Rezultă că există $p, q \in \mathbf{C}[X]$ a. î. $p \cdot [(X + 1)^3 + 1] + q \cdot (X^2 - 1) = 1$, de unde $(p(A)[(A + I_n)^3 + I_n] + g(A)(A^2 - I_n))X = X$.

Atunci $p(A)[(A + I_n)^3 + I_n]X + g(A)(A^2 - I_n)X = X$, de unde $X = 0$ și $\det(A + B + I_n) \ne 0$ și matricea $A + B + I_n$ este inversabilă.

3. a) Fie $d : bx + ay - ab = 0$ și $M \in d$.



Atunci $M(\alpha, \frac{b}{a}(a - \alpha))$, $\alpha \in \mathbf{R}$

și $x_G = \frac{x_A + x_B + x_M}{3} = \frac{2a + \alpha}{3}$,

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_M}{3} = \frac{2b + \frac{b}{a}(a - \alpha)}{3}$$

de unde $\alpha = 3x_G - 2a$ și

$$y_G = \frac{2b + \frac{b}{a}(a - 3x_G + 2a)}{3} = \frac{2b + 3b - \frac{3b}{a}x_G}{3} = \frac{5}{3}b - \frac{b}{a}x_G.$$

Atunci ecuația locului geometric este $\frac{b}{a}x + y - \frac{5}{3}b = 0$ sau $bx + ay - \frac{5}{3}ab = 0$

care este o dreaptă paralelă cu dreapta d.

b) După principiul reflexiei, punctul M pentru care AM + MB e minimă este punctul de intersecție al dreptelor d și A′B, unde A′ este simetricul lui A față de d.

4. Din $a_n > 0$ și $x \in \mathbf{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^x a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^x \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \ne 0$

Atunci:

i) Dacă $x < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^x = 0$ și din $\lim\limits_{n\to\infty} n^x \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

În caz contrar $\lim\limits_{n\to\infty} n^x \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, contradicție deoarece $a \in (0, +\infty)$.

Cum după Stoltz–Cesaro $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = \alpha$

avem $\lim\limits_{n\to\infty} n^x \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = a$

ii) Dacă $x = 0 \Rightarrow n^x = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^x \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = a$.

iii) Dacă $x > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^x = +\infty$ și din $\lim\limits_{n\to\infty} n^x a_n = a \ne 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^x \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = a$

Clasa a XII-a

1. $f : S \to G$ o funcţie bijectivă şi $a \in G \Rightarrow (\exists)\ f^{-1} : G \to S$ a. î. $f \circ f^{-1} = 1_S$, $f^{-1} \circ f = 1_G$.

Din $x * y = \varphi(x, y) = f^{-1}[f(x) + f(y) + a] \Rightarrow f(x * y) = f(x) + f(y) + a$. Cum f este bijectivă rezultă că $(\forall)\ z = f(x) + f(y) + a \in G$ există un unic $t = x * * y \in S$ a. î. $z = f(x * y) \in G \Rightarrow x * y \in S$.

Deci $(\forall)\ x, y \in S \Rightarrow x * y \in S \Rightarrow \varphi(x, y)$ este lege de compoziţie pe S.

Pentru a dovedi că (S, φ) este un grup comutativ verificăm axiomele grupului:

1° Asociativitatea legii φ.

$(x\varphi y)\varphi z = x\varphi(y\varphi z)$, $(\forall)\ x, y, z \in S$.

$(x\varphi y)\varphi z = f^{-1}[f(x\varphi y) + f(z) + a] = f^{-1}\{f[f^{-1}(f(x) + f(y) + a)] + f(z) + a\} =$

$= f^{-1}[f(x) + f(y) + f(z) + 2a]$

$x\varphi(y\varphi z) = f^{-1}[f(x) + f(y\varphi z) + a] = f^{-1}\{f(x) + f[f^{-1}(f(y) + f(z) + a)] + a\} =$

$= f^{-1}[f(x) + f(y) + f(z) + 2a] \Rightarrow (x\varphi y)\varphi z = x\varphi(y\varphi z)$, $(\forall)\ x, y, z \in S$.

2° Existenţa elementului neutru:

$(\exists)\ e \in S$ a. î. $x\varphi e = e\varphi x = x$, $(\forall)\ x \in S$

$$\left.\begin{array}{l} x\varphi e = f^{-1}[f(x)+f(e)+a] = x \\ e\varphi x = f^{-1}[f(e)+f(x)+a] = x \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)+f(e)+a = f(x) \Rightarrow f(e) = -a \Rightarrow$$

$\Rightarrow e = f^{-1}(-a) \in S$.

3° Orice element este simetrizabil:

$(\forall)\ x \in S$, $(\exists)\ x' \in S$ a. î. $x\varphi x' = x'\varphi x = e$.

$$\left.\begin{array}{l} x\varphi x' = f(x)+f(x')+a = e \\ x'\varphi x = f(x')+f(x)+a = e \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)+f(x')+a = f^{-1}(-a) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x') = -f(x) + f^{-1}(-a) - a \Rightarrow x' = f^{-1}[-f(x) + f^{-1}(-a) - a]$

4° Comutativitatea legii φ.

$x\varphi y = y\varphi x$, $(\forall)\ x, y \in S$.

$$\left.\begin{array}{l} x\varphi y = f^{-1}[f(x)+f(y)+a] \\ y\varphi x = f^{-1}[f(y)+f(x)+a] \end{array}\right\} \Rightarrow x\varphi y = y\varphi x, \text{ deoarece } (G,+) \text{ este grup comutativ.}$$

2. Cum H este mulţime finită, condiţia ca H să fie subgrup al lui G, $(\forall)\ x, y \in H \Rightarrow xy \in H$ şi pentru orice $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$ se rezumă la "$(\forall)\ x, y \in H \Rightarrow xy \in H$".

Atunci $(\forall)\ y_i, y_j \in H = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ cu $k > \frac{n}{2} \Rightarrow y_iy_j \in H$ dă condiţia ca H să fie subgrup al lui G.

$y_i \in H \Rightarrow f(xy_i) = f(x)\,f(y_i)\ (\forall)\ x \in G$ şi

$y_j \in H \Rightarrow f(xy_j) = f(x)\,f(y_j)\ (\forall)\ x \in G$

$f(x(y_iy_j)) = f((xy_i)y_j) = f(xy_i)f(y_j) = f(x)f(y_i)f(y_j) = f(x)f(y_iy_j) \Rightarrow y_iy_j \in H$.

Din $\text{card } H = k > \frac{n}{2} \Rightarrow n < 2k$ şi din teorema lui Lagrange $\Rightarrow \text{card } H \mid \text{card } G \Rightarrow k/n \Rightarrow pk = n \Rightarrow pk < 2k \Rightarrow p = 1 \Rightarrow n = k$ şi $H = G$.

Deci $f : G \to G$ verifică relaţia $f(xy) = f(x)f(y)$, $(\forall)\ x, y \in G \Rightarrow f$ este morfism de grupuri.

3. Considerăm funcţia $f : [2, 3] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, cu $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ cu $f'(e) = 0$.

x	2		e		3
f'	$- - - - -$	$- - - - -$	0	$+ + + + +$	$+ + + +$
f	$\frac{2}{\ln 2}$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$\frac{3}{\ln 3}$

Cum $\frac{2}{\ln 2} - \frac{3}{\ln 3} = \frac{2\ln 3 - 3\ln 2}{\ln 2 \cdot \ln 3} = \frac{\ln 9 - \ln 8}{\ln 2 \cdot \ln 3} > 0 \Rightarrow \frac{2}{\ln 2} > \frac{3}{\ln 3}$

Atunci $e \le f(x) \le \frac{2}{\ln 2}$ $(\forall)\ x \in [2, 3]$. De aici $\int_2^3 e\,dx \le \int_2^3 f(x)dx \le \int_2^3 \frac{2}{\ln 2}dx \Rightarrow$

$e \le \int_2^3 \frac{x}{\ln x}dx \le \frac{2}{\ln 2} \Rightarrow e \le A < 3$ deoarece $\frac{2}{\ln 2} < 3 \Leftrightarrow 2 < 3\ln 2 \Leftrightarrow 2 < \ln 8$ adevărat. În final $[A] = 2$.

4. Avem funcţiile $f, g : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x^2$, $g(x) = e^{x^3}$, care sunt continue pe $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Fie funcţia $H : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}$, $H(x) = \int_0^x \sin t^2 dt \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^x e^{t^3} dt$, care este derivabilă pe $[0, \frac{\pi}{2}]$ ca produs de funcții derivabile.

$$H'(x) = \sin x^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} e^{t^3}dt + e^{x^3}\int_0^x \sin t^2 dt = \sin x^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} e^{t^3}dt - e^{x^3}\int_x^0 \sin t^2 dt .$$

Dar $H(0) = H(\frac{\pi}{2}) = 0$, H continuă pe [a, b] și derivabilă pe $(0, \frac{\pi}{2})$, adică H este o funcție Rolle pe [a, b]. Rezultă că există cel puțin un $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ a. î. $H'(c) = 0$.

$$H'(c) = 0 \Rightarrow \sin c^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{c} e^{t^3}dt - e^{c^3}\int_c^0 \sin t^2 dt = 0 \Rightarrow$$

ecuația $\sin x^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} e^{t^3}dt - e^{x^3}\int_x^0 \sin t^2 dt = 0$ are cel puțin o soluție în $(0, \frac{\pi}{2})$.

5. Fie funcția $f : [1, \infty) \to \mathbf{R}$ prin $f(x) = \begin{cases} n, & \text{pentru } x \in \left[n, n + \frac{n^2+1}{2n^2+1}\right] \\ -n, & \text{pentru } x \in \left(n + \frac{n^2+1}{2n^2+1}, n+1\right] \end{cases}$

(i) f este integrabilă pe $\left[n, n + \frac{n^2+1}{2n^2+1}\right]$ și pe $\left(n + \frac{n^2+1}{2n^2+1}, n+1\right]$, deci și pe reuniunea lor, adică pe $[n, n+1]$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$.

(ii) $|f(x)| = n$ pentru $x \in [n, n+1]$ și $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x)| = \infty$

(iii) $$\int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+\frac{n^2+1}{2n^2+1}} ndx - \int_{n+\frac{n^2+1}{2n^2+1}}^{n+1} ndx = nx\Big|_n^{n+\frac{n^2+1}{2n^2+1}} - nx\Big|_{n+\frac{n^2+1}{2n^2+1}}^{n+1} = \frac{n}{2n^2+1}$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+1} f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n^2+1} = 0$.