Concursul interjudeţean de Matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXIII-a, 27-29 martie 2009
Clasa a V-a

**1.** Un hârciog cară seminţe într-o galerie. La primul drum duce cu el o sămânţă, la al doilea duce 3 seminţe, la al treilea duce 5 seminţe, etc, în final la al 55-lea drum duce 109 seminţe. Într-o cămară, hârciogul poate depozita cel mult 1000 seminţe. El începe sa pună seminţe într-o cămară nouă doar după ce a umplut-o complet pe cea precedentă.

**a)** De câte cămări are nevoie hârciogul pentru a depozita toate seminţele?

**b)** După al câtelea drum a umplut complet a doua cămară?

*Raluca Mureşan, Claudia Zaharia*

**2.** Determinaţi cifrele $a$, $b$, $c$ astfel încât $\overline{a(a+b)(a+b+c)c} \vdots 185$ ($a \neq 0$, iar $a+b$ şi $a+b+c$ sunt cifre).

*Raluca Mureşan*

**3.** La un spectacol, magicianul îi cere unei persoane din public să se gândească la un număr de trei cifre, $\overline{abc}$, unde $a$, $b$, $c$ sunt cifre în baza 10. Apoi, magicianul îi cere persoanei respective să formeze numerele $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ şi $\overline{cba}$, să adune aceste cinci numere şi să îi spună suma lor, $N$. Cunoscând valoarea lui $N$, magicianul poate găsi numărul iniţial, $\overline{abc}$. Jucaţi rolul magicianului şi găsiţi $\overline{abc}$ dacă $N = 3194$.

(* * *)

**Notă:** Timp de lucru 2 ore.

Concursul interjudeţean de Matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXIII-a, 27-29 martie 2009
Clasa a VI-a

**1.** Determinaţi numerele naturale $a$ şi $b$ cu proprietatea că

$$[a,b]^2 - 800 \cdot (a,b)^2 = 2009.$$

(*Andrei Eckstein*)

**2.** Să se arate că dacă $a$, $b$ şi $c$ sunt numere cu proprietatea

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1,$$

atunci

$$\frac{a(a+1)}{b+c} + \frac{b(b+1)}{c+a} + \frac{c(c+1)}{a+b} = 1.$$

(*R M T*)

**3.** Un şir de numere naturale este construit după cum urmează: se porneşte cu $a_1$, din care se construieşte $a_2$ astfel: se lasă la o parte cifra unităţilor, apoi se adaugă la numărul astfel obţinut cifra unităţilor înmulţită cu 5 (de exemplu $748 \to 74 + 8 \cdot 5 = 114$). Arătaţi că dacă 2009 apare printre termenii acestui şir, atunci şirul nu conţine numere prime.

(*prelucrare Mihai Chiş*)

**4.** Fie $BB_1$ şi $CC_1$ bisectoarele unghiurilor $B$ şi $C$ ale unui triunghi $ABC$ cu $BC = a$. Simetricul $P$ al lui $B$ faţă de $B_1$ şi simetricul $Q$ al lui $C$ faţă de $C_1$ sunt situate pe dreapta $MN$, unde $M$ este mijlocul lui $[AB]$, $N$ este mijlocul lui $[AC]$, $MN = \frac{a}{2}$ şi $MN||BC$.

Să se calculeze perimetrul triunghiului $ABC$ în funcţie de $a$.

(* * *)

**Notă:** Timp de lucru 3 ore.

# Concursul interjudeţean de matematică Traian Lalescu

## Ediţia a 23-a, Arad, 27-29.III.2009

### clasa a VII-a

**1.** Determinaţi suma primelor $28 + 23 - 7$ zecimale ale numărului $\left((28 + 24 - 7 - \sqrt{2009})^3\right)^{24}$.

**2.** Fie $\Delta ABC$ un triunghi oarecare, $D \in (BC)$ şi $E \in BC \setminus (BC)$ două puncte astfel încât

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BE}{CE},$$

iar $M \in AB$ şi $N \in AC$ punctele în care paralela prin $D$ la $AE$ intersectează dreptele $AB$, respectiv $AC$. Arătaţi că $D$ este mijlocul segmentului $(MN)$.

**3.** Fie $a, b, c, u, v > 0$ numere pozitive, cu $u + v \geq 2$. Arătaţi că
a)

$$a(a + bu + cv) + b(b + cu + av) + c(c + au + bv) \leq \frac{1 + u + v}{3}(a + b + c)^2 .$$

b)

$$\left(\frac{a}{a + bu + cv} + \frac{b}{b + cu + av} + \frac{c}{c + au + bv}\right) \cdot (a(a+bu+cv)+b(b+cu+av)+c(c+au+bv)) \geq (a+b+c)^2 .$$

c)

$$\frac{a}{a + bu + cv} + \frac{b}{b + cu + av} + \frac{c}{c + au + bv} \geq \frac{3}{1 + u + v} .$$

**4.** Fie $\Delta\, ABC$ un triunghi ascuţitunghic, cu centrul de greutate $G$, ortocentrul $H$ şi centrul cercului circumscris $O$. Dacă $A'$ este simetricul punctului $A$ faţă de punctul $O$(i.e., $A' \in AO \setminus (OA$, cu $[A'O] \equiv [AO]$), arătaţi că
a) triunghiurile $\Delta\, AA'B$ şi $\Delta\, AA'C$ sunt dreptunghice.
b) patrulaterul $A'BHC$ este un paralelogram.
c) punctele $O$, $G$ şi $H$ sunt coliniare şi $OH = 3 \cdot OG$.

**Notă:** Timp de lucru - 3 ore
Subiect propus de lect.dr. Mihai Chiş şi asist.dr. Radu Moleriu

**Concursul Interjudețean de Matematică Traian Lalescu**
**Ediția a XXIII-a, Arad, 27-29 Martie 2009**
**Clasa a VIII-a**

1. a) Arătați că pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$ are loc inegalitatea
$$(1+x^2)(1+y^2) \geq (1+xy)^2.$$

   b) Arătați că dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$ cu $abc=1$, atunci
$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4) \geq (1+a)(1+b)(1+c).$$

2. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbf{R}$
$$\{x\} > \left\{x+\frac{1}{2}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \{x\}^2 > \{2x\}.$$

3. Un recipient are formă de paralelipiped dreptunghic cu aria totală $A$. În recipient se află un volum $V$ de apă. Fie $h_1, h_2, h_3$ înălțimile pe care le atinge apa atunci când recipientul este așezat succesiv pe trei fețe ale recipientului care au un vârf comun. Demonstrați că
$$h_1 + h_2 + h_3 \geq \frac{18V}{A}.$$

4. Fie $ABC$ un triunghi echilateral cu ortocentrul $H$ şi $M$, $N$ două puncte variabile pe laturile $(AB)$, respectiv $(AC)$ astfel încât perimetrul triunghiului $AMN$ este egal cu lungimea laturii $(BC)$. Arătați că distanța de la $H$ la $MN$ este constantă.

*Subiect propus de Andrei Eckstein şi Ioan Caşu*

**NOTĂ.** Timp de lucru - trei ore.

# Concursul interjudeţean de matematică Traian Lalescu

## Ediţia a 23-a, Arad, 27-29.III.2009

### clasa a IX-a

**1.** a) Arătaţi că pentru orice numere naturale nenule $a, b, n$,

$$(a+b)^n = \mathcal{M}a^2 + n \cdot a \cdot b^{n-1} + b^n\,.$$

(prin $\mathcal{M}a^2$ înţelegem un multiplu al numărului $a^2$.)
b) Determinaţi ultimele patru cifre ale numărului $2803^{2009}$.

**2.** Fie $\Delta ABC$ un triunghi oarecare, $\lambda \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, $D \in (BC)$ şi $E \in BC \setminus (BC)$ două puncte astfel încât

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BE}{CE} = \lambda\,,$$

iar $M \in AB$ şi $N \in AC$ punctele în care paralela prin $D$ la $AE$ intersectează dreptele $AB$, respectiv $AC$.
a) Determinaţi $t, u, v, w \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC} \qquad \text{şi} \qquad \overrightarrow{AE} = v\overrightarrow{AB} + w\overrightarrow{AC}\,.$$

b) Determinaţi $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AN} = \gamma\overrightarrow{AC}$.
c) Arătaţi că $D$ este mijlocul segmentului $(MN)$.

**3.** Fie $a, b, c > 0$ trei numere pozitive oarecare. Arătaţi că
a)

$$a^2 + b^2 > ab\sqrt{3}\,, \quad a^2 + c^2 > ac\sqrt{3}\,, \quad b^2 + c^2 > bc\,.$$

b)

$$\sqrt{a^2 - ab\sqrt{3} + b^2} + \sqrt{a^2 - ac\sqrt{3} + c^2} \geq \sqrt{b^2 - bc + c^2}\,.$$

c) În inegalitatea de la b) are loc egalitatea dacă şi numai dacă

$$\frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\,.$$

**4.** Fie $\Delta\, ABC$ un triunghi oarecare de laturi $a = BC$, $b = CA$ şi $c = AB$, cu cercul circumscris $\mathcal{C}(O, R)$, cercul înscris $\mathcal{C}(I, r)$ şi cercul exînscris $\mathcal{C}(I_a, r_a)$ tangent interior unghiului $\widehat{BAC}$ şi laturii $(BC)$, aflat în exteriorul triunghiului $\Delta\, ABC$.
a) Arătaţi că

$$(a+b+c)\overrightarrow{PI} = a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC}\,,$$
$$(-a+b+c)\overrightarrow{PI_a} = -a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC}\,,$$

pentru orice punct $P$ din planul triunghiului $\Delta\, ABC$.
b) Au loc egalităţile

$$OI^2 = R^2 - 2Rr \quad \text{şi} \quad OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a\,.$$

**Notă:** Timp de lucru - 3 ore
Subiect propus de lect.dr. Mihai Chiş

# Concursul Interjudețean de Matematică Traian Lalescu
## Ediția a XXIII-a, Arad, 27-29 Martie 2009
## Clasa a X-a

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația:
$$x^{x^{2009}} = 2009.$$

2. Fie $ABCD$ un paralelogram şi $M$ un punct variabil în planul paralelogramului.
   a) Să se determine valoarea minimă a expresiei $MA \cdot MC + MB \cdot MD$.
   b) Să se arate că dacă $M$ nu este unul dintre vârfurile paralelogramului $ABCD$, atunci se poate construi un patrulater convex cu segmentele $(MA)$, $(MB)$, $(MC)$ şi $(MD)$.

3. Numerele complexe $a, a_1, a_2, a_3, a_4$ au acelaşi modul şi verifică egalitățile:
$$a^2 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2.$$
   Să se arate că $a$ este egal cu unul dintre numerele $a_1, a_2, a_3, a_4$ sau cu unul dintre opusele acestora.

4. a) Să se arate că dacă $g\colon X \to Y$ este o funcție injectivă, atunci pentru orice submulțimi $X_1, X_2$ ale lui $X$ are loc egalitatea
$$g(X_1 \setminus X_2) = g(X_1) \setminus g(X_2).$$
   (Prin definiție, $g(Z) = \{g(z) \mid z \in Z\}$, pentru orice submulțime $Z$ a lui $X$.)
   b) Să se arate că nu există funcții $f$: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ care au proprietatea că
$$f(f(n)) = n + 2009$$
   pentru orice număr natural $n$.

*Subiect propus de Ioan Caşu*

**NOTĂ.** Timp de lucru - trei ore.

**Concursul Interjudeţean de Matematică Traian Lalescu**
**Ediţia a XXII-a, Arad, 27-29 Martie 2009**
**Clasa a XI-a**

1. Fie $x_n = \begin{cases} 1, & n \text{ este pătrat perfect,} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$ şi $s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$.

   Să se arate că $\frac{s_n}{n} \to 0$ şi să se studieze convergenţa şirului $\frac{s_n}{\sqrt{n}}$.

   $(\star\star\star)$

2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ o matrice cu proprietatea că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A \cdot A^T = k \cdot I_n + J$, unde $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Arătaţi că $A$ este inversabilă.

   b) Pentru $n = 7$ arătaţi că $AJ - JA = O_7$.

   *E. Cismaş*

3. Fie $\mathcal{A}_1 = \{(\lambda - \mu)E + \mu I_2 \mid E \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ E^2 = E\}$ şi $\mathcal{A}_2 = \{\nu(F + I_2) \mid \nu \in \mathbb{C},\ F \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ F^2 = O_2\}$. Arătaţi că:
   1) $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \{\rho I_2 \mid \rho \in \mathbb{C}\}$.
   2) Calculaţi $A^n$ pentru $A \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ şi $n \in \mathbb{N}$.

   *C. Buşe, V. Radu*

4. Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, cu proprietatea:

   $$|f(x+y) - f(x)| \leq \ln\left(\frac{1+x+y}{1+x}\right),\ \forall x, y \in [0, \infty).$$

   a) Determinaţi $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât mulţimea valorilor lui $f$ să aibă exact $m$ elemente.
   b) Să se arate că următorul şir recurent:

   $$x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2},\ n \geq 0,$$

   are limită pentru orice $x_0 \geq 0$.

   *V. Radu*

**Notă:** Timp de lucru 3 ore.

# Concursul Interjudeţean de Matematică "Traian Lalescu"
# Ediţia a XXIII-a, Arad, 27-29 Martie 2009
# Clasa a XII-a

**I.** *Fie* $\mathcal{M} = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} : \quad f(t) = u(t) + iv(t), t \in [0,1], u$ *şi* $v$ *fiind funcţii reale, derivabile pe* $[0,1]\}$. *Pentru* $f \in \mathcal{M}$, *definim:*

$$(\Delta f)(t) = u'(t) + iv'(t), \quad t \in [0,1].$$

*Arătaţi că:*

**1.** $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f, \quad f, g \in \mathcal{M}.$

**2.** $f^2\Delta(\frac{1}{f}) = -\Delta f, \quad f \in \mathcal{M}, f \neq 0.$

**3.** *Pentru* $f(t) = \frac{1}{t+i}, t \in [0,1]$ *avem* $f \in \mathcal{M}$ *şi* $\Delta f \in \mathcal{M}$.

**4.** *Calculaţi derivata de ordinul* $n \geq 1$ *a funcţiei*

$$u : (0,1] \to \mathbb{R}, u(x) = arctgx.$$

**5.** *Fie* $\rho : [0,1] \to [0,1]$ *şi* $r : [0,1] \to \mathbb{R}$ *două funcţii continue. Arătaţi că*

$$\left(\int_0^1 \rho(t)\cos(r(t))dt\right)^2 + \left(\int_0^1 \rho(t)\sin(r(t))dt\right)^2 \leq \int_0^1 \rho(t)dt.$$

**II.** *Fie* $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ *şi* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funcţii continue. Arătaţi că:*

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 + \left(\int_a^b g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}dx\right)^2.$$

**III.** *Fie* $A$ *un inel şi* $x, y \in A$ *cu* $xy + yx + 1 = 0$. *Arătaţi că dacă* $x - y$ *nu este inversabil atunci* $x^3 + y^3 + y$ *nu este inversabil.*

*Prof.* **Nedeianu Dan**

**IV.** *Fie* $\mathcal{S} = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad x = (x_n)\}$ *Arătaţi că:*

**1.** $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ *(adunarea şi înmulţirea uzuală a şirurilor) este un inel în care mulţimea divizorilor lui zero este infinită.*

**2.** *Funcţia* $\Delta : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ *dată de* $(\Delta x)(n) = x(n+1) - x(n)$ *este un morfism surjectiv al lui* $(\mathcal{S}, +)$.

**3.** *Calculaţi* $K_1 = \{x \in \mathcal{S} : \quad \Delta x = 0\}$ *şi* $K_2 = \{x \in \mathcal{S} : \quad \Delta^2 x = 0\}$.

**4.** *Calculaţi* $\Delta^k x$, *unde* $x = ((-1)^n)$.

**Notă:** *Timp de lucru* 3 *ore.*

*Probleme selectate de* **Constantin Buşe**

Concursul interjudeţean de Matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXIII-a, 27-29 martie 2009
Clasa a V-a
BAREM DE CORECTARE

**Subiectul 1**

• Observarea regulii "la al $k$-lea drum, hârciogul duce $2k-1$ seminţe"...............1p
• Calculul sumei $1+3+5+...+109 = 2\cdot 1-1+2\cdot 2-1+...+2\cdot 55-1 = 2(1+2+...+55)-55 = 55^2 = 3025$...............3p
• Determinarea numărului de cămări necesare...............1p
• Se găseşte că în primele $k$ drumuri duce $k^2$ seminţe...............1p
• Observarea faptului că numărul de drumuri după care se umple a doua cămară este cel mai mic pătrat perfect $\geq 2000$...............2p
• Finalizare...............1p
• Oficiu...............1p

**Subiectul 2**

• Numărul este divizibil cu 5 $\Leftrightarrow c \in \{0,5\}$...............1p
• Cazul $c=0$ - trebuie ca $\overline{a(a+b)(a+b)0} \,\vdots\, 37$...............1p
- scrierea lui $\overline{a(a+b)(a+b)0}$ in baza 10...............1p
- $1110a + 110b \,\vdots\, 37 \Leftrightarrow b \,\vdots\, 37 \Leftrightarrow b = 0$...............1,5p
- $a$ poate fi orice cifră nenulă...............0,5p
• Cazul $c=5$ - trebuie ca $\overline{a(a+b)(a+b+5)5} \,\vdots\, 37$...............1p
- scrierea lui $\overline{a(a+b)(a+b+5)5}$ în baza 10...............1p
$37|(1110a+110b+55) \Leftrightarrow 37|(18-b)$ - imposibil pentru $b$ cifră...............2p
• Oficiu...............1p

**Subiectul 3**

• $N + \overline{abc} = 222(a+b+c)$...............3p
• Căutarea lui $a+b+c$ astfel încât $3194 < 222(a+b+c) < 3194 + 1000$...............3p
• $a+b+c \in \{15, 16, 17, 18\}$...............1p
• Verificarea celor 4 posibilităţi, singura variantă convenabilă fiind $\overline{abc} = 358$...............2p
• Oficiu...............1p

Concursul interjudeţean de Matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXIII-a, 27-29 martie 2009
Clasa a VI-a
BAREM DE CORECTARE

**Subiectul 1**
• Scrierea $a = d \cdot k_1$, $b = d \cdot k_2$ cu $(k_1, k_2) = 1$...............2p
• Înlocuirea în relaţia din enunţ $\Rightarrow d^2(k_1^2 k_2^2 - 800) = 2009$...............2p
• $2009 = 7^2 \cdot 41$...............1p
• $d$ poate fi 1 sau 7...............2p
• Cazul 1: $d = 1 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = 53 \Rightarrow a, b$...............1p
• Cazul 2: $d = 7 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = 29 \Rightarrow a, b$...............1p
• Oficiu...............1p

**Subiectul 2**
• $(a+b+c)\left(\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{b+a}\right) = a+b+c$...............4p
• $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{a+c} + \dfrac{c^2}{b+a} = 0$...............3p
• Se adună relaţia anterioară cu cea din enunţ şi se obţine concluzia...............2p
• Oficiu...............1p

**Subiectul 3**
• Se presupune că 2009 este termen al şirului. Se observă că: $2009 \to 200 + 9 \cdot 5 = 245 \to 24 + 5 \cdot 5 = 49 \to 4 + 9 \cdot 5 = 49$, etc...............2p
• Toti termenii sirului de la un moment dat vor fi egali cu 49...............1p
• 2009 este multiplu de 49...............1p
• Se demonstrează că dacă un termen al şirului este multiplu de 49, si cel de dinaintea sa va avea aceasta proprietate: $\overline{abcd} + 5e \ \vdots\ 49 \Leftrightarrow 10 \cdot \overline{abcd} + 50 \cdot e \ \vdots\ 49 \Leftrightarrow 10 \cdot \overline{abcd} + e \ \vdots\ 49 \Leftrightarrow \overline{abcde} \ \vdots\ 49$...............5p
• Oficiu...............1p

**Subiectul 4**
• Figura corectă...............1p
• $\triangle B_1BC \equiv \triangle B_1PN$ $(U.L.U.)$...............1,5p
• $NP = BC = a$...............0,5p
• $\triangle C_1BC \equiv \triangle C_1MQ$ $(U.L.U.)$...............1,5p

- $MQ = BC = a$...............0,5p
- $\triangle MBP$ - isoscel $\Rightarrow MB = MP = \frac{3a}{2}$...............1,5p
- $AB = 3a$...............0,5p
- Analog $AC = 3a$...............1p
- Perimetrul triunghiului $ABC = 7a$...............1p
- Oficiu...............1p

# Barem de corectare la clasa a VII-a

**1.**

| | |
|---|---|
| start | 1p |
| scrie sub forma $(45-\sqrt{2009})^{72}$ | 1p |
| observă că $44<\sqrt{2009}<45$ | 1p |
| arată că $45-\sqrt{2009}=\frac{16}{45+\sqrt{2009}}<\frac{16}{89}<\frac{1}{5}$ | 3p |
| arată că $\left(\frac{1}{5}\right)^{72}=\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\right)^{24}<\left(\left(\frac{1}{10}\right)^{2}\right)^{24}=\left(\frac{1}{10}\right)^{48}$ | 2p |
| deduce că primele 48(deci şi primele 44) de zecimale ale numărului dat sunt nule | 2p |
| **Total** | **10p** |

**2.**

| | |
|---|---|
| start | 1p |
| rescrie relaţia din enunţ sub forma $\frac{BD}{BE}=\frac{CD}{CE}$ (1) | 1p |
| din $MD \parallel AE$ deduce că $\Delta\, BMD \sim \Delta\, BAE$ | 1,5p |
| şi obţine că $\frac{MD}{AE}=\frac{BD}{BE}$ (2) | 1p |
| din $DN \parallel AE$ deduce că $\Delta\, CDN \sim \Delta\, CEA$ | 1,5p |
| şi obţine că $\frac{ND}{AE}=\frac{CD}{CE}$ (3) | 1p |
| din (1), (2) şi (3) deduce că $\frac{MD}{AE}=\frac{ND}{AE}$ | 2p |
| şi $D$ este mijlocul segmentului $(MN)$ | 1p |
| **Total** | **10p** |

**3.**

| | |
|---|---|
| start | 1p |
| a) arată că $a(a+bu+cv)+b(b+cu+av)+c(c+au+bv)=$ $=\frac{1+u+v}{3}(a+b+c)^2-\frac{u+v-2}{3}(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ | 2p |
| şi obţine inegalitatea | 1p |
| b) aplică inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz şi obţine inegalitatea cerută | 3p |
| c) din inegalităţile de la a) şi b) obţine $\frac{1+u+v}{3}(a+b+c)^2\left(\frac{a}{a+bu+cv}+\frac{b}{b+cu+av}+\frac{c}{c+au+bv}\right)\geq(a+b+c)^2$ | 2p |
| şi deduce concluzia | 1p |
| **Total** | **10p** |

**4.**

| | |
|---|---|
| start | 1p |
| a) Din $[A'O]\equiv[AO]\equiv[BO]$ obţine că $m(\widehat{ABA'})=m(\widehat{BAA'})+m(\widehat{BA'A})=90^\circ$ | 1p |
| şi triunghiul $\Delta\, BAA'$ este dreptunghic | 1p |
| analog, $\Delta\, CAA'$ este dreptunghic | 1p |
| b) Din $BH\perp AC\perp A'C$ obţine că $BH\parallel A'C$ | 1p |
| analog, $CH\perp AB\perp A'B$ implică $CH\parallel A'B$ | 0,5p |
| şi $A'BHC$ este paralelogram | 0,5p |
| c) Pentru $M\in BC\cap A'H$ avem că $[BM]\equiv[CM]$ şi $[HM]\equiv[A'M]$ | 1p |
| atunci $G\in(AM)$ cu $GM=\frac{1}{3}AM$, | 1p |
| iar dacă $G'$ este centrul de greutate al triunghiului $\Delta\, AHA'$, atunci $G'\in(AM)$ cu $G'M=\frac{1}{3}AM$ | 1p |
| deduce că $G=G'$ şi $G\in(HO)$, cu $OH=3\cdot OG$ | 1p |
| **Total** | **10p** |

**Concursul Interjudețean de Matematică Traian Lalescu**
**Ediția a XXIII-a, Arad, 27-29 Martie 2009**

**Barem – Clasa a VIII-a**

**Problema 1**
Start ... 1p
Demonstrează inegalitatea de la a) ... 2p
Aplică inegalitatea de la punctul a) succesiv pentru $x = a^2, y = b^2; x = b^2, y = c^2; x = c^2, y = a^2$ şi prin înmulțire apoi extragere de radicali obține inegalitatea $(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4) \geq (1+a^2b^2)(1+b^2c^2)(1+c^2a^2)$ ... 4p
Aplică inegalitatea de la punctul a) succesiv pentru $x = ab, y = bc; x = bc, y = ca; x = ca, y = ab$ şi prin înmulțire apoi extragere de radicali obține inegalitatea $(1+a^2b^2)(1+b^2c^2)(1+c^2a^2) \geq |(1+ab^2c)(1+abc^2)(1+a^2bc)|$ ... 2p
Aplică ipoteza $abc=1$ şi finalizează ... 1p

**Problema 2**
Start ... 1p
Observă că $\left\{x+\frac{1}{2}\right\} < \{x\} \quad \Leftrightarrow \quad \{x\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ ... 2p
Pentru implicația directă: observă că $\{2x\} = 2\{x\} - 1$ ... 2p
Arată că $2\{x\} - 1 \leq \{x\}^2$ ... 1p
Justifică de ce nu poate avea loc egalitate mai sus ... 1p
Pentru implicația inversă: consideră $x$ cu $\{x\} < \frac{1}{2}$ ... 1p
Observă că $\{2x\} = 2\{x\}$ ... 1p
Demonstrează că $2\{x\} \geq \{x\}^2$ ... 1p

**Problema 3**
Start ... 1p
Dacă se notează cu $S_1, S_2, S_3$ ariile fețelor pe care este aşezat recipientul, scrie că $A = 2(S_1 + S_2 + S_3)$ ... 1p
Scrie că $V = h_1S_1 = h_2S_2 = h_3S_3$ ... 2p
Scrie echivalent inegalitatea din concluzie ca $h_1 + h_2 + h_3 \geq \dfrac{9V}{S_1 + S_2 + S_3} = \dfrac{9}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}}$ ... 2p
Demonstrează inegalitatea obținută (cu inegalitatea mediilor, cu Cauchy-Buniakowski sau altfel) ... 4p

**Problema 4**
Start ... 1p
Observă că *AM+MN+NA=BC* se scrie echivalent *(BC-BM)+MN+(BC-CN)=BC* ... 2p
Rescrie sub forma *MN+BC=BM+CN* ... 1p
Afirmă că egalitatea obținută implică faptul că *BMNC* este patrulater circumscriptibil ... 2p
Observă că cercul înscris în *BMNC* este cercul înscris în triunghiul ABC ... 2p
Observă că distanța de la *H* la *MN* este egală cu raza cercului înscris în triunghiul *ABC* (şi patrulaterul *BMNC*), deci este constantă ... 2p

## Barem de corectare la clasa a IX-a

**1.**

start 1p
a) verifică pentru $n = 1$ 1p
efectuează pasul de inducţie 1p
finalizează corect demonstraţia prin inducţie 1p
b) foloseşte a) şi arată că $2803^{2009} \equiv 2009 \cdot 2800 \cdot 3^{2008} + 3^{2009} (mod\, 10^4)$ 1p
observă că $3^4 \equiv 1 (mod\, 2^4)$ şi deduce că $3^{500} \equiv 1 (mod\, 2^4)$ 1p
cu teorema lui Wilson arată că $3^{500} \equiv 1 (mod\, 5^4)$ 1p
deduce că $3^{500} \equiv 1 (mod\, 10^4)$ şi $3^{2000} \equiv 1 (mod\, 10^4)$ 1p
deduce că $2803^{2009} \equiv 2800 \cdot 3^{10} + 3^9 = 2800 \cdot 59049 + 19683 (mod\, 10^4)$ 1p
obţine că $2803^{2009} \equiv 2800 \cdot 49 + 9683 = 2800 \cdot (50 - 1) + 9683 \equiv 9683 - 2800 = 6883 (mod\, 10^4)$ 1p

**Total** **10p**

**2.**

start 1p
a) din $D \in (BC)$ şi $BD = \lambda CD$ deduce $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{DC}$ 1p
şi obţine $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AC}$, deci $t = \frac{1}{1+\lambda}$ şi $u = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ 1p
din $E \in BC \setminus (BC)$ şi $BE = \lambda CE$ deduce $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{CE}$
şi obţine $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{AB} + \frac{-\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{AC}$, deci $v = \frac{1}{1-\lambda}$ şi $w = \frac{-\lambda}{1-\lambda}$ 1p
b) Din $DM \parallel AE$ deduce că $\frac{t-\beta}{u} = \frac{v}{w} = -\frac{t}{u}$ 1p
şi $\beta = 2t = \frac{2}{1+\lambda}$ 1p
Din $DN \parallel AE$ deduce că $\frac{u-\gamma}{t} = \frac{w}{v} = -\frac{u}{t}$ 1p
şi $\gamma = 2u = \frac{2\lambda}{1+\lambda}$ 1p
c) Observă că $\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$ 1p
şi deduce că $D$ este mijlocul segmentului $(MN)$ 1p

**Total** **10p**

**3.**

start 1p
a) aplică inegalitatea mediilor şi obţine inegalităţile 1p
*(soluţie algebrică)*
b) scrie inegalitatea de demonstrat sub forma
$\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}b - a)^2 + (\frac{1}{2}b)^2} + \sqrt{(a - \frac{\sqrt{3}}{2}c)^2 + (\frac{1}{2}c)^2} \geq \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c))^2 + (\frac{1}{2}(b+c))^2}$ 3p
şi foloseşte inegalitatea lui Minkowski pentru a obţine rezultatul 1p
c) pune condiţia de egalitate în inegalitatea lui Minkowski $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}b - a}{\frac{1}{2}b} = \frac{a - \frac{\sqrt{3}}{2}c}{\frac{1}{2}c}$ 2p
şi obţine rezultatul 2p
*(soluţie geometrică)*
b) consideră puncte $O, A, B, C$ în plan cu $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$,
$m(\widehat{BOC}) = 60°$, $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOC}) = 30°$ 2p
arată că $AB = \sqrt{a^2 - ab\sqrt{3} + b^2}$, $AC = \sqrt{a^2 - ac\sqrt{3} + c^2}$, $BC = \sqrt{b^2 - bc + c^2}$ 1p
aplică inegalitatea triunghiului $AB + AC \geq BC$ şi obţine rezultatul 1p
c) cazul de egalitate are loc exact când $A \in (BC)$, adică $OA$ este bisectoarea interioară în $\Delta\, OBC$ 1p
aplică teorema bisectoarei $\frac{AB}{OB} = \frac{AC}{OC}$ 1p
şi obţine că $\left(\frac{a}{b} - \frac{a}{c}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c} - \sqrt{3}\right) = 0$ 1p
deduce că $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \sqrt{3}$, sau $b = c$ şi $a = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ şi obţine concluzia 1p

**Total** **10p**

**4.**

start 1p
a) Cu $D \in AI \cap BC$, aplică teorema bisectoarei în triunghiul $\Delta\, ABC$
şi obţine $\overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$ 2p
aplică teorema bisectoarei(interioare şi exterioare) în $\Delta\, BAD$
şi obţine $\overrightarrow{AI} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AI_a} = \frac{b}{-a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{-a+b+c}\overrightarrow{AC}$, 2p
de unde deduce egalităţile din enunţ 1p
b) Pentru $P = O$, ridică egalităţile de la a) la pătrat 1p
foloseşte că $2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2R^2 - AB^2$ 1p
deduce că $OI^2 = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}$ şi $OI_a^2 = R^2 + \frac{abc}{-a+b+c}$ 1p
foloseşte $abc = 4RS = 4Rrp = 4Rr_a(p-a)$ şi obţine egalităţile cerute 1p

**Total** **10p**

**Concursul Interjudețean de Matematică Traian Lalescu**
**Ediția a XXIII-a, Arad, 27-29 Martie 2009**

**Barem – Clasa a X-a**

**Problema 1**

Start … 1p

Arată că nu avem soluții cu $0 < x \le 1$ ... 1p

Cu substituția $x^{2009} = y$ reduce ecuația la $y^y = 2009^{2009}$ ... 2p

Demonstrează că funcția $t \mapsto t^t$ este strict crescătoare pentru $t > 1$ ... 4p

Finalizează şi obține soluția unică a ecuației $x = 2009^{\frac{1}{2009}}$ ... 2p

**Problema 2**

Start ... 1p

Alege un sistem de axe cu originea în punctul de intersecție al diagonalelor lui *ABCD* ... 1p

Din *A(a)* şi *B(b)* deduce *C(-a)* şi *D(-b)* ... 1p

Scrie $|z-a|\cdot|z+a|+|z-b|\cdot|z+b|=|z^2-a^2|+|z^2-b^2|\ge|a^2-b^2|=|a-b|\cdot|a+b|$ ... 2p

Deduce că $MA\cdot MC+MB\cdot MD\ge AB\cdot BC$ şi observă că egalitatea se atinge pentru (de exemplu) $M=B$, iar valoarea minimă cerută este deci *AB·BC* ... 1p

Scrie $MA+MB+MC=|z-a|+|b-z|+|z+a|\ge|(z-a)+(b-z)+(z+a)|=|z+b|=MD$ (*) ... 1p

Scrie explicit când se realizează egalitatea în $|z_1|+|z_2|\ge|z_1+z_2|$ şi arată că nu poate avea loc egalitate în (*) ... 2p

Deduce $MA+MB+MC>MD$ şi analoagele, apoi afirmă că de aici rezultă concluzia ... 1p

**Problema 3**

Start ... 1p

Pentru cazul $a=a_1+a_2+a_3+a_4$ calculează produsul

$(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)(a-a_4)=a^4-s_1a^3+s_2a^2-s_3a+s_4$, unde $s_1=\sum a_i$, $s_2=\sum a_ia_j$, $s_3=\sum a_ia_ja_k$, $s_4=a_1a_2a_3a_4$ ... 2p

Observă că din ipoteza $(a_1+a_2+a_3+a_4)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2$ rezultă $s_2=0$ ... 1p

Observă că $a^4-s_1a^3=0$ ... 1p

Trecând la conjugate în $a=a_1+a_2+a_3+a_4$ şi ținând cont de egalitatea modulelor obține $\frac{1}{a}=\frac{s_3}{s_4}$, adică $-s_3a+s_4=0$ ... 3p

Deduce din cele de mai sus $(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)(a-a_4)=0$ şi finalizează acest caz ... 1p

Pentru cazul $a=-(a_1+a_2+a_3+a_4)$ afirmă că se procedează similar, calculând $(a+a_1)(a+a_2)(a+a_3)(a+a_4)$ ... 1p

**Problema 4**
Start ... 1p
Demonstrează afirmația de la a) prin dublă incluziune ... 2p
Deduce că *f* este funcție injectivă ... 1p
Consideră incluziunile $f^{(2)}(N) \subseteq f(N) \subseteq N$, unde $f^{(2)} = f \circ f$ ... 1p
Consideră mulțimile $A = N \setminus f(N); B = f(N) \setminus f^{(2)}(N)$; din injectivitatea funcției *f* şi punctul a) deduce că $f(A) = B$... 2p
Observă că *A, B* sunt disjuncte ... 1p
Observă că $A \cup B = N \setminus f^{(2)}(N) = \{0,1,...,2008\}$... 1p
Deoarece *A, B* au acelaşi număr de elemente (între *A* şi *B* existând o bijecție) ajunge la contradicția că 2009 este par ... 1p

Barem de corectare, clasa a XI-a, Problema 1

Se observă că $s_n = k$, $\forall n \in \{k^2, k^2+1, ..., (k+1)^2-1\}$. Prin urmare $s_n = [\sqrt{n}]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Avem relaţiile $0 \leq \frac{s_n}{n} = \frac{[\sqrt{n}]}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Din criteriul cleştelui $\frac{s_n}{n} \to 0$.

Deasemenea avem inegalităţile $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} < \frac{s_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1,$$

din criteriul cleştelui rezultă că şirul $\frac{s_n}{\sqrt{n}}$ este convergent şi are limita 1.

## Barem de corectare, clasa a XI-a, Problema 2

Start (1p)

a) Calculul pentru $\det(A \cdot A^T) = (n+k)k^{n-1}$ se face folosind proprietăţile determinanţilor. (2p)

$(n-k)k^{n-1} = \det(A \cdot A^T) = \det(A)\det(A^T) = \det(A)^2 \neq 0$, deci matricea $A$ este inversabilă. (2p)

b) Din relaţia din enunţ rezultă că suma pătratelor elementelor de pe linii este egală cu $k+1$. Deoarece elementele sunt 0 şi 1, suma pătratelor elementelor de pe o linie este egaă cu suma elementelor de pe linia respectivă. Atunci şi suma elementelor de pe fiecare linie este $k+1$. Se obţine astfel relaţia $AJ = (k+1)J$. (2p)

$A$ este inversabilă, şi înmulţim relaţia precedentă cu $A^{-1}$ la stânga şi obţinem $A^{-1}J = \dfrac{1}{k+1}J$.

Folosim relaţia din enunţ înmulţind-o cu $A^{-1}$ la stânga obţinem $A^T = kA^{-1} + A^{-1}J = kA^{-1} + \frac{1}{k+1}J$. Înmulţim această relaţie cu $J$ la dreapta şi folosim faptul că $J^2 = 7J$ şi obţinem

$$A^TJ = kA^{-1}J + \frac{7}{k+1}J = \frac{k}{k+1}J + \frac{7}{k+1}J = \frac{k+7}{k+1}J.$$

Transpunem şi obţinem $JA = \dfrac{k+7}{k+1}J$. (2p)

Folosim faptul că $Tr(AJ) = Tr(JA)$ şi obţinem că $k+1 = \dfrac{k+7}{k+1}$. Folosind relaţiile de mai sus $AJ = JA$. (1p)

## Barem de corectare, clasa a XI-a, Problema 3

Start (1p)

a) Fie $A \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. Atunci există $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ astfel încât $A = (\lambda - \mu)E + \mu I_2 = \nu(F + I_2)$, unde $E, F \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $E^2 = E$, $F^2 = O_2$. (1p)

Această relaţie se scrie echivalent $(\lambda - \mu)E - \nu F = (\mu - \nu)I \quad (\star)$. Din această relaţie se obţine uşor că $EF = FE$ înmulţind la dreapta, respectiv la stânga cu $E$. (2p)

Ridicând la pătrat relaţia obţinem

$$\begin{aligned} &(\lambda-\mu)^2E^2 + \nu^2F^2 - 2\nu(\lambda-\mu)EF = (\mu-\nu)^2I_2 \\ \Longleftrightarrow\ &(\lambda-\mu)^2E - 2\nu(\lambda-\mu)EF = (\mu-\nu)^2I_2 \\ \Longleftrightarrow\ &(\lambda-\mu)E((\lambda-\mu)I_2 - 2\nu F) = (\mu-\nu)^2I_2. \end{aligned}$$

(2p)

**Cazul I.** $\mu \neq \nu$. Atunci matricea $E$ este inversabilă şi din $E^2 = E$ rezultă că $E = I_2$. Deci $A = \lambda I_2$. (1p)

**Cazul II.** $\mu = \nu$. Din $(\star) \Rightarrow (\lambda - \mu)E = \nu F$. Ridicând la pătrat avem $(\lambda - \mu)^2 E = O_2$.

i) Dacă $\lambda = \mu$ atunci $A = \mu I_2$.

ii) Dacă $\lambda \neq \mu$ atunci $E = O_2$ şi $A = \mu I_2$. (1p)

Prin urmare, $A$ poate avea numai forma $A = \rho I_2$, $\rho \in \mathbb{C}$. Este evident că orice astfel de matrice aparţine mulţimii $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.

b) $A \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow A^n = (\lambda^n - \mu^n) + \mu^n I_2$. (1p)

$A \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow A^n = \nu^n(nF + I_2)$. (1p)

Barem de corectare, clasa a XI-a, Problema 4

a) Demonstrăm că $f$ este o funcţie continuă. Fie $x_0 \geq 0$. Atunci avem

$$|f(x_0+y)-f(x_0)| \leq \ln\left(\frac{1+x_0+y}{1+x_0}\right).$$

Dacă trecem la limită pentru $y \to 0$ în relaţia precedentă obţinem că $f(x_0+y) \to f(x_0)$. Prin urmare $\lim\limits_{x\to x_0, x>x_0} f(x) = f(x_0)$.

Pentru $x_0 > 0$ şi $y \geq 0$ cu $x_0 - y \geq 0$, folosind relaţia din enunţ avem:

$$|f(x_0)-f(x_0-y)| \leq \ln\left(\frac{1+x_0}{1+x_0-y}\right),\ x_0>0,\ x_0-y \geq 0.$$

Trecem la limită pentru $y \to 0$ în relaţia precedentă şi obţinem că $f(x_0-y) \to f(x_0)$. Prin urmare $\lim\limits_{x\to x_0, x<x_0} f(x) = f(x_0)$.

Din cele de mai sus, funcţia $f$ este continuă. Prin urmare $f$ are proprietatea Darboux şi $f([0,\infty)$, care este chiar imaginea lui $f$ este un interval.

Un interval nu poate avea un număr finit de puncte, decât dacă intervalul este redus la un punct. Deci singura valoare pentru $m$ astfel încât imaginea lui $f$ să aibă exact $m$ elemente este $m=1$.

b) $|f(x+y)-f(x)| \leq \ln\left(\frac{1+x+y}{1+x}\right) = \ln\left(1+\frac{y}{1+x}\right) \leq \frac{y}{1+x} \leq y,\ \forall[0,\infty) \iff |f(a)-f(b)| \leq |a-b|,\ \forall a,b \in [0,\infty)$. (aceasta este o altă varantă pentru a demonstra continuitatea lui $f$)

Fie $x \leq y \in [0,\infty)$. Atunci $\frac{x+f(x)}{2} - \frac{y+f(y)}{2} = \frac{x-y}{2} + \frac{f(x)-f(y)}{2} \leq \frac{x-y}{2} + \frac{|f(x)-f(y)|}{2} \leq \frac{x-y}{2} + \frac{|y-x|}{2} = \frac{x-y}{2} + \frac{y-x}{2} = 0$.

Deci $x \leq y \Rightarrow \frac{x+f(x)}{2} \leq \frac{y+f(y)}{2}$.

Prin urmare dacă $x_0 \leq f(x_0)$ se demonstrează inductiv că şirul este crescător, iar dacă $x_0 \geq f(x_0)$ atunci şirul este descrescător.

Prin urmare şirul $(x_n)$ este monoton şi astfel are limită.

**Concursul Interjudeţean de Matematică "Traian Lalescu"**
**Ediţia a XXIII-a, Arad, 28-30 Martie 2009**
**Clasa a XII-a**
**Barem de corectare**

**I.**

- **1.** **(1p)**
- **2.** Aplică formula precedentă pentru $g = \frac{1}{f^2}$. **(1p)**
- **3.** $\Delta(\frac{1}{t+i}) = -\frac{1}{(t+i)^2}$ şi calculele aferente. **(1p)**
- **4.** $u'(t) = \frac{1}{t^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i}\right)$ **(1p)**.

$$u^{(n)}(t) = \left(\frac{1}{t^2+1}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{(t-i)^n} - \frac{(-1)^{n-1}}{(t+i)^n}\right).$$

Scrierea sub formă trigonometrică şi calculele aferente. **(1p)**

- **5.** Aplicăm inegalitatea lui Cauchy şi obţinem:

$$\left(\int_0^1 \rho(t)\cos(r(t)dt\right)^2 + \left(\int_0^1 \rho(t)\sin(r(t))dt\right)^2 \leq \int_0^1 \rho^2(t)dt$$

**(1p)**.
Ţinem cont că $\rho^2 \leq \rho$ şi obţinem inegalitatea dorită. **(1p)**

**II.** $z = \int_a^b f + i\int_a^b g = r(cos\theta + isin\theta), r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$ **(1p)**

$$r = \sqrt{\left(\int_a^b f\right)^2 + \left(\int_a^b g\right)^2} = \left(\int_a^b f + i\int_a^b g\right)(\cos\theta + i\sin(\theta))(\mathbf{2p})$$

$$= \int_a^b (f\cos\theta + g\sin\theta)(\mathbf{1p})$$

$$\leq \int_a^b \sqrt{f^2+g^2}(\mathbf{2p})$$

Finalizare **(1p)**.

**III.**

- Demonstrează relaţia:

$$(x-y)(x^2+xy-y^2) = x^3+y^3+y.(\mathbf{6p})$$

- $x - y$ neinversabil implică $x^3 + y^3 + y$ neinversabil. **(1p)**

**IV.**

- Verifica că $\mathcal{S}$ este inel. **(1p)**
- Exemple de divizori ai lui zero. **(1p)**
- Arată că este morfism **(1p)**.
- Arată că este surjectiv **(1p)**
- $K_1$ este mulţimea şirurilor constante, iar $K_2$ este mulţimea polinoamelor de grad cel mult unu. **(1p)**
- Arată că $\Delta^k x = (-1)^{n+k} 2^k$(**2p**).