



CLASA A XI-A
PROFIL M1

(2p)	1. a) de exemplu, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (evident, orice exemplu corect, justificat, se acceptă)
(1p)	b) Pentru $A \in M_2(\mathbb{Z})$ notăm $d = \det(A), t = \text{tr}(A)$ și avem imediat : $\det(A + I_2) = t + d + 1$ (*)
(1p)	Pe de altă parte, se știe că : $A^2 = tA - dI_2$ (Cayley – Hamilton)
(1p)	Scriem (*) pentru A^2 și ajungem la : $\det(A^2 + I_2) = t^2 - 2d + d^2 + 1$
(1p)	Egalitatea din enunț conduce acum imediat la $(d - 2)^2 + (t - 1)^2 = 6$
(1p)	care este nu este posibilă în numere întregi.
(4p)	2. a) demonstrăm prin inducție : $\sqrt{n} \geq a_n \geq \sqrt{n} - 1$ Pentru $n = 1$ inegalitățile sunt adevărate ; dacă sunt adevărate pentru un $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem : $a_{n+1} = \frac{n}{a_n + 1} \leq \frac{n}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1}$ și $a_{n+1} = \frac{n}{a_n + 1} \geq \frac{n}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{n}{\sqrt{n+1} + 1} = \sqrt{n+1} - 1$
(3p)	b) folosind inegalitățile anterioare deducem $\frac{(\sqrt{n} - 1)^2}{n} \leq \frac{a_n^2}{n} \leq \frac{n}{n}$ și acum utilizăm teorema “ cleștelui “
(4p)	3. a) orice exemplu corect și justificat...
(3p)	b) $g(X) = g(Y) \Rightarrow f(g(X)) = f(g(Y)) \Rightarrow \dots \Rightarrow f(X) \cdot B = f(Y) \cdot B$ înmulțim la dreapta cu C și ajungem la $f(X) = f(Y) \Rightarrow X = Y$
(3p)	4. dacă $a \neq 2$, limita propusă nu este finită ; așadar o condiție, deocamdată necesară, este $a = 2$.
(4p)	Se ajunge imediat la : $a = 2, b = -\frac{5}{4}$

BAREM DE NOTARE ȘI CORECTARE

Notă:

Orice altă soluție corectă se notează corespunzător.