



**MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI INOVĂRII**  
**INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI CARAȘ-SEVERIN**

Strada Ateneului Nr.1, 320112 REȘIȚA-ROMANIA

Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042

e-mail: [isjcaras@cs.ro](mailto:isjcaras@cs.ro)

[www.cs.isj.edu.ro](http://www.cs.isj.edu.ro)

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**FAZA LOCALĂ - 14.02.2009**

Clasa a XI a

1. a) Să se dea un exemplu de matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $A \neq O_2$ ,  $A \neq I_2$ , pentru care există  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$  astfel încât  $A^p = A$ ;  
b) Să se arate că dacă  $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $n, p \geq 2$  și  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  astfel încât  $A^{p+1} = A$ , atunci  $\text{rang}(A) + \text{rang}(I_n - A^p) = n$ .

RMCS 24, articol

2. Un determinant  $D$  de ordinul 3 are elementele de pe diagonala principală egale cu  $\frac{1}{2}$ , iar suma elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană este egală cu 1. Să se arate că :  $D > 0$ .

\* \* \*

3. Fie  $x_1 \in (0,1)$  și șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  definit prin  $x_{n+1} = x_n^3 - x_n^2 + 1$ ,  $\forall n \geq 1$ . Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este convergent și să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)$

\* \* \*

4. Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3^x + 5^x}{2} \right)^{\text{ctg} x}$ .

GM 10/2007

**NOTĂ:**

- TIMP DE LUCRU 3 ORE.
- TOATE SUBIECTELE SUNT OBLIGATORII.