

Barem de notare, clasa a IX a

1). $x + y + \sqrt{z} = x + y + \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq 2\sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$ (3p)

Cu notația $a = \sqrt{xy}$, avem $2a + \frac{1}{a} > 2\sqrt{2}$ (2p) (atenție la inegalitatea

strictă!) Deducem $\frac{1}{x + y + \sqrt{z}} < \frac{\sqrt{2}}{4}$ (1p). Finalizare (1p)

2) a) Dacă $x < 0$, membrul stâng este negativ, iar cel drept strict pozitiv; evident, $x = 0$ nu verifică, (2p)

iar dacă $x \in (0, 2)$, membrul stâng este 0, pe când cel drept este supraunitar; în general

acum, dacă $x \in [2k, 2k + 2)$, $k \in \mathbb{N}^*$, avem $\left[\frac{x}{2}\right] = k$ și $x^2 + 1 \geq 4k^2 > k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, așadar ecuația

nu are soluții reale; (2p)

b) se observă soluția $y = 0$ și, printr-un raționament asemănător cu cel anterior, se arată că nu mai există alte numere reale y care să satisfacă egalitatea din enunț. (3p) □

3) Simplă aplicare a principiului inducției matematice (7p)

4) a) chestiune cunoscută, demonstrație fără probleme (4p)

b)
$$\vec{IG} = \frac{1}{a+b+c} \cdot (a \cdot \vec{AG} + b \cdot \vec{BG} + c \cdot \vec{CG}) = \frac{1}{12} \cdot \sum a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} =$$
$$= \dots = \frac{1}{12} \cdot \vec{AC}$$

Concluzia este imediată. (3p)